

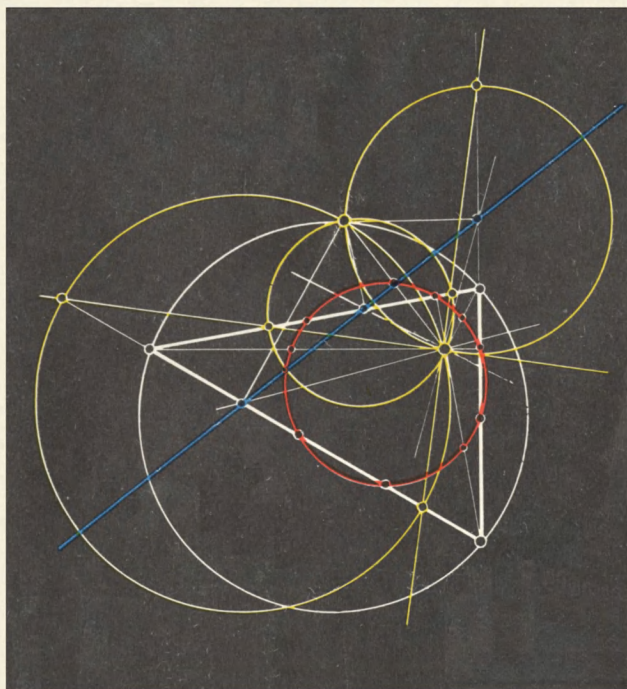


БИБЛИОТЕЧКА • КВАНТ •  
выпуск 17

И. Ф. ШАРЫГИН

# ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

## ПЛАНИМЕТРИЯ





БИБЛИОТЕЧКА • КВАНТ •

ВЫПУСК 17

---

И. Ф. ШАРЫГИН

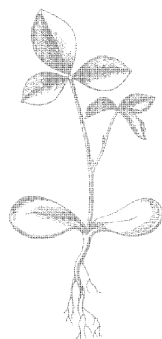
# ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

## ПЛАНИМЕТРИЯ

Издание второе, переработанное  
и дополненное



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1986



Scan AAW

ББК 22.151.0  
Ш 26  
УДК 514.112

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Академик **Ю. А. Осипьян** (председатель), академик **А. Н. Колмогоров** (заместитель председателя), профессор **Л. Г. Асламазов** (ученый секретарь), член-корреспондент АН СССР **А. А. Абрикосов**, академик **Б. К. Вайнштейн**, заслуженный учитель РСФСР **Б. В. Воздвиженский**, профессор **С. П. Капица**, академик **С. П. Новиков**, академик АПН СССР **В. Г. Разумовский**, академик **Р. З. Сагдеев**, профессор **Я. А. Смородинский**, академик **С. Л. Соболев**, член-корреспондент АН СССР **Д. К. Фаддеев**.

**Шарыгин И. Ф.**

**Ш26** Задачи по геометрии. (Планиметрия). — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 224 с. — (Б-чка «Квант». Вып. 17.)

45 к., 150 000 экз.

Включает более 600 задач по планиметрии. В первой части собраны сравнительно простые задачи, которые чаще сопровождаются только ответами и могут быть использованы как в классной, так и во внеклассной работе. Вторая часть сопровождается указаниями и подробными решениями. В новом издании частично изменилась общая структура: изменилось расположение задач в связи с новой более подробной классификацией, введен ряд новых разделов (окружности и касательные, многоугольники, комбинации фигур и т. д.), добавлено более 200 новых задач в основном за счет исключения наиболее простых задач предыдущего издания (1982 г.).

Для школьников и учителей математики.

Ш 1702040000 — 042  
053(02) — 86 163-86

ББК 22.151.0

# СОДЕРЖАНИЕ

---

Предисловие	4
I. ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФАКТЫ И ТЕОРЕМЫ. ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ	7
II. ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ ПЛАНИМЕТРИИ	36
§ 1. Теорема Карно	36
§ 2. Теоремы Чева и Менелая. Аффинные задачи	39
§ 3. Геометрические места точек	44
§ 4. Треугольник. Треугольник и окружность	48
§ 5. Четырехугольник	62
§ 6. Окружности и касательные. Теорема Фейербаха	69
§ 7. Комбинации фигур. Перемещения на плоскости. Мно- гоугольники	73
§ 8. Геометрические неравенства. Задачи на максимум и минимум	78
III. ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ	85
I. Основные геометрические факты и теоремы. Задачи на вычисление	85
II. Избранные задачи и теоремы планиметрии	113

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

По сравнению с первым изданием 1982 года книга претерпела существенные изменения. Добавлено свыше двухсот новых задач. Такое увеличение числа задач вынудило автора более серьезно подойти к проблеме классификации задач, от каковой в первом издании он попросту отмахнулся, ограничившись при распределении задач по разделам одним поверхностным критерием — по условию. Впрочем, и принятая во втором издании классификация далека от совершенства и во многом является спорной, излишне укрупненной, отнесение иных задач к соответствующему разделу может вызвать вполне резонные возражения, хотя в каждом конкретном случае автор может привести некоторые более или менее разумные доводы, почему задача попала именно в этот раздел, а не в другой.

Первый раздел открывается набором геометрических фактов, примыкающих к курсу геометрии 6–8 классов средней школы. Многие из них входили ранее в традиционные школьные учебники. Кроме того, в этом разделе собраны задачи (в основном «на вычисление» элементов геометрических фигур), призванные активизировать знание основных школьных формул и теорем, развить технику решения геометрических задач. Работа над ними поможет читателю подготовиться к школьным и конкурсным экзаменам (некоторые из этих задач в прошлом предлагались на экзаменах). В первой половине этого раздела — задачи относительно простые, они снабжены лишь ответами, в дальнейшем сложность задач возрастает, задачи сопровождаются указаниями к решению или более подробными решениями. Здесь уместно сделать одно замечание, относящееся ко всей книге. Увеличение числа задач при довольно жестком ограничении объема книги заставило автора, вопреки его желанию и его геометрической концепции, пойти на существенное сокращение числа чертежей, переложив обязанность создания чертежа в большинстве случаев на читателя, поскольку решение задачи по геометрии без чертежа, без «картинки», — противоестественно.

Уже в первом разделе, особенно во второй его половине, встречаются довольно трудные задачи. Во втором разделе, рассчитанном на увлеченного геометрией читателя, трудность задач возрастает, хотя и здесь каждый параграф открывается относительно простыми вводными задачами. Основными критериями отбора задач являлись: естественность формулировки, геометричность решения, неожиданность результата, оригинальность задачи.

Несмотря на введение классификации в основном по объекту, фигурирующему в задаче, автор не делал попытки систематизировать задачи по типам и методам решения, по принадлежности к тому или иному разделу геометрии. По существу, почти каждая геометрическая задача (по сравнению с рутинными упражнениями на решение уравнений, неравенств и т. п.) нестандартна: в каждой надо придумать, какие сделать дополнительные построения, какими воспользоваться формулами и теоремами. Поэтому предлагаемую книгу никак нельзя рассматривать как задачник по систематическому курсу геометрии; скорее это сборник различных геометрических находок, цель которого — демонстрация изящества элементарно-геометрических приемов доказательств и расчетов (без использования векторной алгебры и с минимальным привлечением метода координат, геометрических преобразований и, пожалуй, несколько большим — тригонометрии).

Сейчас в школьном курсе геометрии учеников знакомят с разнообразными понятиями и средствами решения задач, но именно их разнообразие оставляет мало времени на приобретение навыков решения этих задач, и вкус к такого рода задачам, которые собраны в этой книге, у современных школьников несколько снизился. Конечно, вопрос о том, насколько важно научиться решать трудные геометрические задачи, спорен. Быть может, и в самом деле тем, кто связывает свое будущее с профессией математика или программиста, полезнее заниматься задачами комбинаторно-логического характера, изучать начала анализа, учиться составлять программы для ЭВМ. Но все же автор считает, что развитое геометрическое воображение — качество, необходимое будущему математику и полезное будущим инженерам, физикам, строителям, архитекторам и многим другим.

Трудно гарантировать, что автору в каждом случае удалось найти «оптимальный» путь решения (справедливость этих слов, сказанных в предисловии к первому изданию, подтвердилась при работе над вторым; в ряде задач автору удалось улучшить старые решения, при этом уверенность в возможности дальнейших улучшений возросла), не говоря уже о том, что некоторые

(хотя, видимо, немногие) задачи знаток геометрии решил бы короче, используя инверсию, методы проективной геометрии и т. п. Автор намеренно не намечал все возможные связи и обобщения задач, как это принято у математиков-теоретиков, доискивающих в каждом отдельном случае логически наиболее прозрачного общего факта, а действовал скорее как физик-практик, которому надо решить конкретную задачу, по принципу: если не видно простого изящного решения, надо «посчитать». Возможно, некоторые читатели не откажут себе в удовольствии улучшить предложенный автором путь решения отдельных задач. Однако стоит заметить, что некоторые задачи довольно трудны. Если говорить об их использовании в школьной работе, то они могут представить интерес в качестве темы доклада на кружке или конференции.

Хотя степень оригинальности собранных в книге задач различна (некоторые можно найти в старых книгах и журналах, другие предлагались на математических олимпиадах или были опубликованы в журнале «Квант»), автор все же надеется, что кое-что из представленной здесь коллекции заинтересует и опытных любителей геометрии.

Заметим, что в некоторых случаях к задачам дается лишь план решения или разбирается один из возможных случаев. Необходимость перебора разных возможных случаев расположения фигур — нередко встречающийся недостаток элементарно-геометрических доказательств, который, как правило, исчезает при переходе к векторам, «направленным углам», методу координат и т. п.; правда, при этом зачастую исчезает и сама геометрия.

Чтобы сделать книгу понятной для читателей разных поколений и с разными уровнями подготовки, была выбрана терминология, не совсем совпадающая с принятой сейчас в школе. Конгруэнтные фигуры называются просто «равными», не используются знаки и обозначения:  $\cong$ ,  $[AB]$ ,  $(AB)$  и т. п. По сравнению с первым изданием автор изменил обозначение величины угла (вместо  $\widehat{ABC}$  используется  $\angle ABC$ ), величины дуги (вместо  $\widehat{AB}$  используется  $\cup AB$ ). Кроме того, в отдельных случаях, когда речь идет, например, о треугольнике  $ABC$ , употребляются обозначения:  $\angle A$ ,  $\sin A$ , что означает  $\angle BAC$ ,  $\sin \angle BAC$ .

В заключение автор считает своим долгом поблагодарить А. З. Берштейна, принимавшего участие в работе над первым разделом книги. Автор признателен также А. А. Ягубянцу, общившему несколько изящных геометрических фактов.

# 1. ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФАКТЫ И ТЕОРЕМЫ. ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

---

1. Доказать, что медианы в треугольнике пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении  $1:2$ .

2. Доказать, что медианы делят треугольник на шесть равновеликих частей.

3. Доказать, что диаметр окружности, описанной около треугольника, равен отношению его стороны к синусу противолежащего угла.

4. Пусть вершина угла находится вне круга и стороны угла пересекают окружность. Доказать, что величина угла измеряется полуразностью дуг, отсекаемых его сторонами на окружности и расположенных внутри угла.

5. Пусть вершина угла находится внутри круга. Доказать, что величина угла измеряется полусуммой дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями за вершину угла.

6. Пусть  $AB$  — хорда окружности,  $l$  — касательная к окружности ( $A$  — точка касания). Доказать, что каждый из двух углов между  $AB$  и  $l$  измеряется половиной дуги окружности, заключенной внутри рассматриваемого угла.

7. Через точку  $M$ , находящуюся на расстоянии  $a$  от центра окружности радиуса  $R$  ( $a > R$ ), проведена секущая, пересекающая окружность в точках  $A$  и  $B$ . Доказать, что  $|MA| \cdot |MB|$  постоянно для всех секущих и равно  $a^2 - R^2$  (квадрату длины касательной).

8. В окружности радиуса  $R$  через точку  $M$ , находящуюся на расстоянии  $a$  от ее центра ( $a < R$ ), проведена хорда  $AB$ . Доказать, что  $|AM| \cdot |MB|$  постоянно для всех хорд и равно  $R^2 - a^2$ .

9. Пусть  $AM$  — биссектриса треугольника  $ABC$ . Доказать, что  $|BM| : |CM| = |AB| : |AC|$ . То же верно для биссектрисы внешнего угла треугольника. (В этом случае  $M$  лежит на продолжении стороны  $BC$ .)

10. Доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

11. Стороны треугольника равны  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Доказать, что медиана  $m_a$ , проведенная к стороне  $a$ , вычисляется по



формуле

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

12. Даны два треугольника, у которых одна вершина  $A$  — общая, а другие вершины расположены на двух прямых, проходящих через  $A$ . Доказать, что отношение площадей этих треугольников равно отношению произведений двух сторон каждого треугольника, содержащих вершину  $A$ .

13. Доказать, что площадь описанного многоугольника равна  $rp$ , где  $r$  — радиус вписанной окружности,  $p$  — его периметр (в частности, эта формула справедлива для треугольника).

14. Доказать, что площадь четырехугольника равна произведению диагоналей на синус угла между ними.

15. Доказать справедливость следующих формул для площади треугольника:

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}, \quad S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C,$$

где  $A, B, C$  — углы треугольника,  $a$  — сторона, лежащая против угла  $A$ ,  $R$  — радиус описанного круга.

16. Доказать, что радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, вычисляется по формуле  $r = \frac{a + b - c}{2}$ ,

где  $a$  и  $b$  — катеты,  $c$  — гипотенуза.

17. Доказать, что если  $a$  и  $b$  — две стороны треугольника,  $\alpha$  — угол между ними и  $l$  — биссектриса этого угла, то

$$l = \frac{2ab \cos \frac{\alpha}{2}}{a + b}.$$

18. Доказать, что расстояния от вершины  $A$  треугольника  $ABC$  до точек касания вписанной окружности со сторонами  $AB$  и  $AC$  равны  $p - a$ , где  $p$  — полупериметр треугольника  $ABC$ ,  $a = |BC|$ .

19. Доказать, что если в выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  выполняется соотношение  $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$ , то существует окружность, касающаяся всех его сторон.

20. а) Доказать, что высоты в треугольнике пересекаются в одной точке. б) Доказать, что расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот вдвое больше, чем расстояние от центра описанного круга до противоположной стороны.

21. На одной стороне прямого угла с вершиной в точке  $O$  взяты две точки  $A$  и  $B$ , причем  $|OA| = a$ ,  $|OB| = b$ . Найти радиус окружности, проходящей через точки  $A$  и  $B$  и касающейся другой стороны угла.

22. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна  $c$ , а один из острых углов равен  $30^\circ$ . Найти радиус окружности с центром в вершине угла в  $30^\circ$ , делящей данный треугольник на две равновеликие части.

23. В прямоугольном треугольнике даны катеты  $a$  и  $b$ . Найти расстояние от вершины прямого угла до ближайшей к ней точки вписанной окружности.

24. В прямоугольном треугольнике медиана равна  $m$  и делит прямой угол в отношении  $1:2$ . Найти площадь треугольника.

25. В треугольнике  $ABC$  даны стороны  $|BC| = a$ ,  $|CA| = b$ ,  $|AB| = c$ . Найти отношение, в котором точка пересечения биссектрис делит биссектрису угла  $B$ .

26. Доказать, что сумма расстояний от любой точки основания равнобедренного треугольника до боковых сторон равна высоте этого треугольника, проведенной к боковой стороне.

27. Доказать, что сумма расстояний от любой точки внутри правильного треугольника до его сторон равна высоте этого треугольника.

28. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  на основании  $AC$  взята точка  $M$  так, что  $|AM| = a$ ,  $|MC| = b$ . В треугольники  $ABM$  и  $CBM$  вписаны окружности. Найти расстояние между точками касания этих окружностей со стороной  $BM$ .

29. В параллелограмме со сторонами  $a$  и  $b$  и углом  $\alpha$  проведены биссектрисы четырех углов. Найти площадь четырехугольника, ограниченного биссектрисами.

30. В ромб с высотой  $h$  и острым углом  $\alpha$  вписана окружность. Найти радиус наибольшей из двух возможных окружностей, каждая из которых касается данной окружности и двух сторон ромба.

31. Определить острый угол ромба, в котором сторона есть среднее геометрическое его диагоналей.

32. Диагонали выпуклого четырехугольника равны  $a$  и  $b$ , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны. Найти площадь четырехугольника.

33. Сторона  $AD$  прямоугольника  $ABCD$  в три раза больше стороны  $AB$ ; точки  $M$  и  $N$  делят  $AD$  на три равные части. Найти  $\angle AMB + \angle ANB + \angle ADB$ .

34. Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $A$  проведены хорды  $AC$  и  $AD$ , касающиеся данных окружностей. Доказать, что  $|AC|^2 \cdot |BD| = |AD|^2 \cdot |BC|$ .

35. Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, опущенными на гипотенузу.

36. На окружности радиуса  $r$  выбраны три точки таким образом, что окружность оказалась разделенной на три дуги, которые относятся как  $3:4:5$ . В точках деления к окружности проведены касательные. Найти площадь треугольника, образованного этими касательными.

37. Около окружности описана равнобокая трапеция с боковой стороной  $l$ , одно из оснований которой равно  $a$ . Найти площадь трапеции.

38. Две прямые, параллельные основаниям трапеции, делят каждую из боковых сторон на три равные части. Вся трапеция разделена ими на три части. Найти площадь средней части, если площади крайних  $S_1$  и  $S_2$ .

39. В трапеции  $ABCD$  известно, что  $|AB| = a$ ,  $|BC| = b$  ( $a \neq b$ ). Определить, что пересекает биссектриса угла  $A$ : основание  $BC$  или боковую сторону  $CD$ .

40. Найти длину отрезка прямой, параллельной основаниям трапеции и проходящей через точку пересечения диагоналей, если основания трапеции равны  $a$  и  $b$ .

41. В равнобокой трапеции, описанной около окружности, отношение параллельных сторон равно  $k$ . Найти угол при основании.

42. В трапеции  $ABCD$  основание  $AB$  равно  $a$ , а основание  $CD$  равно  $b$ . Найти площадь трапеции, если известно, что диагонали трапеции являются биссектрисами углов  $DAB$  и  $ABC$ .

43. В равнобокой трапеции средняя линия равна  $a$ , а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

44. Площадь равнобокой трапеции, описанной около круга, равна  $S$ , а высота трапеции в два раза меньше ее боковой стороны. Определить радиус вписанного в трапецию круга.

45. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции и ее основаниями, равны  $S_1$  и  $S_2$ . Найти площадь трапеции.

46. В треугольнике  $ABC$  угол  $ABC$  равен  $\alpha$ . Найти угол  $AOC$ , где  $O$  — центр вписанной окружности.

47. В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса прямого угла. Найти расстояние между точками пересечения высот двух получившихся треугольников, если катеты данного треугольника равны  $a$  и  $b$ .

48. Прямая, перпендикулярная двум сторонам параллелограмма, делит его на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Найти острый угол параллелограмма, если его стороны равны  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ).

49. Дан полукруг с диаметром  $AB$ . Через середину полуокружности проведены две прямые, делящие полукруг на три равновеликие части. В каком отношении эти прямые делят диаметр  $AB$ ?

50. Дан квадрат  $ABCD$ , сторона которого равна  $a$ , и построены две окружности. Первая окружность целиком расположена внутри квадрата  $ABCD$ , касается стороны  $AB$  в точке  $E$ , а также касается стороны  $BC$  и диагонали  $AC$ . Вторая окружность с центром в точке  $A$  проходит через точку  $E$ . Найти площадь общей части двух кругов, ограниченных этими окружностями.

51. Вершины правильного шестиугольника со стороной  $a$  являются центрами окружностей, радиусы которых равны  $a/\sqrt{2}$ . Найти площадь части шестиугольника, расположенной вне этих окружностей.

52. Вне окружности радиуса  $R$  взята точка  $A$ , из которой проведены две секущие: одна проходит через центр, а другая — на расстоянии  $R/2$  от центра. Найти площадь части круга, расположенной между этими секущими.

53. В четырехугольнике  $ABCD$  известны углы:  $\angle DAB = 90^\circ$ ,  $\angle DBC = 90^\circ$ . Кроме того,  $|DB| = a$ ,  $|DC| = b$ . Найти расстояние между центрами двух окружностей, одна из которых проходит через точки  $D$ ,  $A$  и  $B$ , а другая — через точки  $B$ ,  $C$  и  $D$ .

54. На сторонах  $AB$  и  $AD$  ромба  $ABCD$  взяты две точки  $M$  и  $N$  так, что прямые  $MC$  и  $NC$  делят ромб на три равновеликие части. Найти  $|MN|$ , если  $|BD| = d$ .

55. На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $M$  и  $N$  так, что  $|AM| : |MN| : |NB| = 1 : 2 : 3$ . Через точки  $M$  и  $N$  проведены прямые, параллельные стороне  $AC$ . Найти площадь части треугольника, заключенной между этими прямыми, если площадь треугольника  $ABC$  равна  $S$ .

56. Дана окружность и точка  $A$  вне ее.  $AB$  и  $AC$  — касательные к окружности ( $B$  и  $C$  — точки касания). Доказать, что центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , лежит на данной окружности.

57. Вокруг равностороннего треугольника  $ABC$  описана окружность и на дуге  $BC$  взята произвольная точка  $M$ . Доказать, что  $|AM| = |BM| + |CM|$ .

58. Пусть  $H$  — точка пересечения высот  $\triangle ABC$ . Найти углы  $\triangle ABC$ , если  $\angle BAH = \alpha$ ,  $\angle ABH = \beta$ .

59. Площадь ромба равна  $S$ , сумма его диагоналей —  $m$ . Найти сторону ромба.

60. Квадрат со стороной  $a$  вписан в окружность. Найти сторону квадрата, вписанного в один из полученных сегментов.

61. В сегмент с дугой  $120^\circ$  и высотой  $h$  вписан прямоугольник  $ABCD$  так, что  $|AB| : |BC| = 1 : 4$  ( $BC$  лежит на хорде). Найти площадь прямоугольника.

62. Площадь кругового кольца равна  $S$ . Радиус большей окружности равен длине меньшей. Найти радиус меньшей окружности.

63. Сторону правильного десятиугольника выразить через  $R$  — радиус описанной окружности.

64. К окружности радиуса  $R$  из внешней точки  $M$  проведены касательные  $MA$  и  $MB$ , образующие угол  $\alpha$ . Определить площадь фигуры, ограниченной касательными и меньшей дугой окружности.

65. Дан квадрат  $ABCD$  со стороной  $a$ . Найти радиус окружности, проходящей через середину стороны  $AB$ , центр квадрата и вершину  $C$ .

66. Дан ромб со стороной  $a$  и острым углом  $\alpha$ . Найти радиус окружности, проходящей через две соседние вершины ромба и касающейся противоположной стороны ромба или ее продолжения.

67. Даны три попарно касающиеся окружности радиуса  $r$ . Найти площадь треугольника, образованного тремя прямыми, каждая из которых касается двух окружностей и не пересекает третью.

68. Окружность радиуса  $r$  касается некоторой прямой в точке  $M$ . На этой прямой по разные стороны от  $M$  взяты точки  $A$  и  $B$  так, что  $|MA| = |MB| = a$ . Найти радиус окружности, проходящей через  $A$  и  $B$  и касающейся данной окружности.

69. Дан квадрат  $ABCD$  со стороной  $a$ . На стороне  $BC$  взята точка  $M$  так, что  $|BM| = 3|MC|$ , а на стороне  $CD$  — точка  $N$  так, что  $2|CN| = |ND|$ . Найти радиус окружности, вписанной в треугольник  $AMN$ .

70. Дан квадрат  $ABCD$  со стороной  $a$ . Определить расстояние между серединой отрезка  $AM$ , где  $M$  — середина  $BC$ , и точкой  $N$  на стороне  $CD$ , делящей ее так, что  $|CN| : |ND| = 3 : 1$ .

71. В треугольнике  $ABC$  из вершины  $A$  выходит прямая, делящая пополам медиану  $BD$  (точка  $D$  лежит на стороне  $AC$ ). В каком отношении эта прямая делит сторону  $BC$ ?

72. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  катет  $CA$  равен  $b$ , катет  $CB$  равен  $a$ ,  $CH$  — высота,  $AM$  — медиана. Найти площадь треугольника  $BMH$ .

73. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  известно, что  $\angle A = \alpha > 90^\circ$  и  $|BC| = a$ . Найти расстояние между точкой пересечения высот и центром описанной окружности.

74. Вокруг треугольника  $ABC$ , в котором  $|BC| = a$ ,  $\angle B = \alpha$ ,  $\angle C = \beta$ , описана окружность. Биссектриса угла  $A$  пересекает окружность в точке  $K$ . Найти  $|AK|$ .

75. В окружности радиуса  $R$  проведен диаметр и на нем взята точка  $A$  на расстоянии  $a$  от центра. Найти радиус второй окружности, которая касается диаметра в точке  $A$  и изнутри касается данной окружности.

76. В окружности проведены три попарно пересекающиеся хорды. Каждая хорда разделена точками пересечения на три равные части. Найти радиус окружности, если одна из хорд равна  $a$ .

77. Один правильный шестиугольник вписан в окружность, а другой описан около нее. Найти радиус окружности, если разность периметров этих шестиугольников равна  $a$ .

78. В правильном треугольнике  $ABC$ , сторона которого равна  $a$ , проведена высота  $BK$ . В треугольники  $ABK$  и  $BCK$  вписано по окружности и к ним проведена общая внешняя касательная, отличная от стороны  $AC$ . Найти площадь треугольника, отсекаемого этой касательной от треугольника  $ABC$ .

79. Во вписанном четырехугольнике  $ABCD$  известны углы:  $\angle DAB = \alpha$ ,  $\angle ABC = \beta$ ,  $\angle BKC = \gamma$ , где  $K$  — точка пересечения диагоналей. Найти  $\angle ACD$ .

80. Во вписанном четырехугольнике  $ABCD$ , диагонали которого пересекаются в точке  $K$ , известно, что  $|AB| = a$ ,  $|BK| = b$ ,  $|AK| = c$ ,  $|CD| = d$ . Найти  $|AC|$ .

81. Вокруг трапеции описана окружность. Основание трапеции составляет с боковой стороной угол  $\alpha$ , а с диагональю — угол  $\beta$ . Найти отношение площади круга к площади трапеции.

82. В равнобокой трапеции  $ABCD$  основание  $AD$  равно  $a$ , основание  $BC$  равно  $b$ ,  $|AB| = d$ . Через вершину  $B$  проведена прямая, делящая пополам диагональ  $AC$  и пересекающая  $AD$  в точке  $K$ . Найти площадь треугольника  $BDK$ .

83. Найти сумму квадратов расстояний от точки  $M$ , взятой на диаметре некоторой окружности, до концов любой из параллельных этому диаметру хорд, если радиус окружности равен  $R$ , а расстояние от  $M$  до центра окружности равно  $a$ .

84. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами  $90^\circ$  и  $60^\circ$ . Найти радиусы окружностей, если расстояние между их центрами равно  $a$ .

85. Дан правильный треугольник  $ABC$ . Точка  $K$  делит сторону  $AC$  в отношении  $2:1$ , а точка  $M$  делит сторону  $AB$  в от-

ношении  $1:2$  (считая в обоих случаях от вершины  $A$ ). Доказать, что длина отрезка  $KM$  равна радиусу окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .

86. Окружности радиусов  $R$  и  $R/2$  касаются друг друга внешним образом. Один из концов отрезка длины  $2R$ , образующего с линией центров угол, равный  $30^\circ$ , совпадает с центром окружности меньшего радиуса. Какая часть отрезка лежит вне обеих окружностей? (Отрезок пересекает обе окружности.)

87. В треугольнике  $ABC$  проведены  $BK$  — медиана,  $BE$  — биссектриса,  $AD$  — высота. Найти длину стороны  $AC$ , если известно, что прямые  $BK$  и  $BE$  делят отрезок  $AD$  на три равные части и  $|AB| = 4$ .

88. Отношение радиуса окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, к радиусу окружности, описанной около этого треугольника, равно  $k$ . Найти угол при основании треугольника.

89. Найти косинус угла при основании равнобедренного треугольника, если точка пересечения его высот лежит на вписанной в треугольник окружности.

90. Найти площадь пятиугольника, ограниченного прямыми  $BC$ ,  $CD$ ,  $AN$ ,  $AM$  и  $BD$ , где  $A$ ,  $B$  и  $D$  — три вершины квадрата  $ABCD$ ,  $N$  — середина стороны  $BC$ ,  $M$  делит сторону  $CD$  в отношении  $2:1$  (считая от вершины  $C$ ), если сторона квадрата  $ABCD$  равна  $a$ .

91. В треугольнике  $ABC$  даны:  $\angle BAC = \alpha$ ,  $\angle ABC = \beta$ . Окружность с центром в  $B$  проходит через  $A$  и пересекает прямую  $AC$  в точке  $K$ , отличной от  $A$ , прямую  $BC$  — в точках  $E$  и  $F$ . Найти углы треугольника  $EKF$ .

92. Дан квадрат со стороной  $a$ . Найти площадь правильного треугольника, одна вершина которого совпадает с серединой одной из сторон квадрата, а две другие расположены на диагоналях квадрата.

93. На сторонах квадрата  $ABCD$  взяты точки  $M$ ,  $N$  и  $K$ , где  $M$  — середина  $AB$ ,  $N$  лежит на стороне  $BC$ , причем  $2|BN| = |NC|$ ,  $K$  лежит на стороне  $DA$ , причем  $2|DK| = |KA|$ . Найти синус угла между прямыми  $MC$  и  $NK$ .

94. Через вершины  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  проходит окружность радиуса  $r$ , пересекающая сторону  $BC$  в точке  $D$ . Найти радиус окружности, проходящей через точки  $A$ ,  $D$  и  $C$ , если  $|AB| = c$ ,  $|AC| = b$ .

95. В треугольнике  $ABC$  сторона  $AB$  равна  $3$ , а высота  $CD$ , опущенная на сторону  $AB$ , равна  $\sqrt{3}$ . Основание  $D$  высоты  $CD$  лежит на стороне  $AB$ , отрезок  $AD$  равен стороне  $BC$ . Найти  $|AC|$ .

96. В окружность радиуса  $R$  вписан правильный шестиугольник  $ABCDEF$ . Найти радиус круга, вписанного в треугольник  $ACD$ .

97. Сторона  $AB$  квадрата  $ABCD$  равна 1 и является хордой некоторой окружности, причем остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Длина касательной  $CK$ , проведенной из вершины  $C$  к той же окружности, равна 2. Чему равен диаметр окружности?

98. В прямоугольном треугольнике меньший угол равен  $\alpha$ . Перпендикулярно гипотенузе проведена прямая, делящая треугольник на две равновеликие части. Определить, в каком отношении эта прямая делит гипотенузу.

99. Внутри правильного треугольника со стороной 1 помещены две касающиеся друг друга окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника (каждая сторона треугольника касается хотя бы одной окружности). Доказать, что сумма радиусов этих окружностей не меньше, чем  $(\sqrt{3} - 1)/2$ .

100. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с острым углом  $A$ , равным  $30^\circ$ , проведена биссектриса  $BD$  другого острого угла. Найти расстояние между центрами двух окружностей, вписанных в треугольники  $ABD$  и  $CBD$ , если меньший катет равен 1.

101. В трапеции  $ABCD$  углы  $A$  и  $D$  при основании  $AD$  соответственно равны  $60^\circ$  и  $30^\circ$ . Точка  $N$  лежит на основании  $BC$ , причем  $|BN| : |NC| = 2$ . Точка  $M$  лежит на основании  $AD$ , прямая  $MN$  перпендикулярна основаниям трапеции и делит ее площадь пополам. Найти  $|AM| : |MD|$ .

102. В треугольнике  $ABC$  заданы  $|BC| = a$ ,  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ . Найти радиус окружности, касающейся стороны  $AC$  в точке  $A$  и касающейся стороны  $BC$ .

103. В треугольнике  $ABC$  известно:  $|AB| = c$ ,  $|BC| = a$ ,  $\angle B = \beta$ . На стороне  $AB$  взята точка  $M$  так, что  $2|AM| = 3|MB|$ . Найти расстояние от  $M$  до середины стороны  $AC$ .

104. На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  взята точка  $M$ , а на стороне  $AC$  — точка  $N$ , причем  $|AM| = 3|MB|$ , а  $2|AN| = |NC|$ . Найти площадь четырехугольника  $MBCN$ , если площадь треугольника  $ABC$  равна  $S$ .

105. Даны две концентрические окружности радиусов  $R$  и  $r$  ( $R > r$ ) с общим центром  $O$ . Третья окружность касается их обеих. Найти тангенс угла между касательными к третьей окружности, выходящими из точки  $O$ .

106. В параллелограмме  $ABCD$  известно:  $|AB| = a$ ,  $|AD| = b$  ( $b > a$ ),  $\angle BAD = \alpha$  ( $\alpha < 90^\circ$ ). На сторонах  $AD$  и  $BC$  взяты точки  $K$  и  $M$ , так, что  $BKDM$  — ромб. Найти сторону ромба.



**107.** В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна  $c$ . Центры трех окружностей радиуса  $c/5$  находятся в его вершинах. Найти радиус четвертой окружности, которая касается трех данных и не содержит их внутри себя.

**108.** Найти радиус окружности, которая высекает на обеих сторонах угла величины  $\alpha$  хорды длины  $a$ , если известно, что расстояние между ближайшими концами этих хорд равно  $b$ .

**109.** На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны  $AB$  и  $AC$  в точках  $M$  и  $N$ . Найти площадь треугольника  $AMN$ , если площадь треугольника  $ABC$  равна  $S$ , а  $\angle BAC = \alpha$ .

**110.** В окружности радиуса  $R$  проведены две взаимно перпендикулярные хорды  $MN$  и  $PQ$ . Найти расстояние между точками  $M$  и  $P$ , если  $|NQ| = a$ .

**111.** В треугольнике  $ABC$  на наибольшей стороне  $BC$ , равной  $b$ , выбирается точка  $M$ . Найти наименьшее расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников  $BAM$  и  $BCM$ .

**112.** В параллелограмме  $ABCD$  известны  $|AB| = a$ ,  $|BC| = b$ ,  $\angle ABC = \alpha$ . Найти расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников  $BCD$  и  $DAB$ .

**113.** В треугольнике  $ABC$  известно, что  $\angle A = \alpha$ ,  $|BA| = a$ ,  $|AC| = b$ . На сторонах  $AC$  и  $AB$  взяты точки  $M$  и  $N$ , где  $M$  — середина  $AC$ . Найти длину отрезка  $MN$ , если известно, что площадь треугольника  $AMN$  составляет  $1/3$  площади треугольника  $ABC$ .

**114.** Найти углы ромба, если площадь вписанного в него круга вдвое меньше площади ромба.

**115.** Найти площадь общей части двух квадратов, если у каждого сторона равна  $a$  и один получается из другого поворотом вокруг вершины на угол  $45^\circ$ .

**116.** Во вписанном в круг четырехугольнике две противоположные стороны взаимно перпендикулярны, одна из них равна  $a$ , прилежащий к ней острый угол делится диагональю на части  $\alpha$  и  $\beta$ . Определить диагонали (угол  $\alpha$  прилежит к данной стороне).

**117.** Дан параллелограмм  $ABCD$  с острым углом  $DAB$ , равным  $\alpha$ , в котором  $|AB| = a$ ,  $|AD| = b$  ( $a < b$ ). Пусть  $K$  — основание перпендикуляра, опущенного из вершины  $B$  на  $AD$ , а  $M$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $K$  на продолжение стороны  $CD$ . Найти площадь треугольника  $BKM$ .

**118.** В треугольнике  $ABC$  из вершины  $C$  проведены два луча, делящие угол  $ACB$  на три равные части. Найти отношение

отрезков этих лучей, заключенных внутри треугольника, если  $|BC| = 3|AC|$ ,  $\angle ACB = \alpha$ .

119. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $|AB| = |BC|$ ) проведена биссектриса  $AD$ . Площади треугольников  $ABD$  и  $ADC$  равны соответственно  $S_1$  и  $S_2$ . Найти  $|AC|$ .

120. Окружность радиуса  $R_1$  вписана в угол величины  $\alpha$ . Другая окружность, радиуса  $R_2$ , касается одной стороны угла в той же точке, что и первая, и пересекает вторую сторону угла в точках  $A$  и  $B$ . Найти  $|AB|$ .

121. На прямой, проходящей через центр  $O$  окружности радиуса 12, взяты точки  $A$  и  $B$  так, что  $|OA| = 15$ ,  $|AB| = 5$ . Из точек  $A$  и  $B$  проведены касательные к окружности, точки касания которых лежат по одну сторону от прямой  $OAB$ . Найти площадь треугольника  $ABC$ , где  $C$  — точка пересечения этих касательных.

122. В треугольнике  $ABC$  известно  $|BC| = a$ ,  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ . Найти радиус окружности, пересекающей все его стороны и высекающей на каждой из них хорды длины  $d$ .

123. В выпуклом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны соответственно  $a$  и  $b$  и пересекаются под углом  $60^\circ$ . Найти диагонали четырехугольника.

124. В треугольнике  $ABC$  на стороне  $BC$  взята точка  $M$  таким образом, что расстояние от вершины  $B$  до центра тяжести треугольника  $AMC$  равно расстоянию от вершины  $C$  до центра тяжести треугольника  $AMB$ . Доказать, что  $|BM| = |DC|$ , где  $D$  — основание высоты, опущенной на  $BC$  из вершины  $A$ .

125. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  биссектриса  $BE$  прямого угла  $B$  делится центром  $O$  вписанной окружности так, что  $|BO| : |OE| = \sqrt{3} : \sqrt{2}$ . Найти острые углы треугольника.

126. На отрезке  $AB$  длины  $R$  как на диаметре построена окружность. Вторая окружность такого же радиуса, как и первая, имеет центр в точке  $A$ . Третья окружность касается первой окружности внутренним образом, второй окружности — внешним образом, а также касается отрезка  $AB$ . Найти радиус третьей окружности.

127. Дан треугольник  $ABC$ . Известно, что  $|AB| = 4$ ,  $|AC| = 2$ ,  $|BC| = 3$ . Биссектриса угла  $A$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $K$ . Прямая, проходящая через точку  $B$  параллельно  $AC$ , пересекает продолжение биссектрисы  $AK$  в точке  $M$ . Найти  $|KM|$ .

128. Окружность с центром, расположенным внутри прямого угла, касается одной стороны угла, пересекает другую сторону в точках  $A$  и  $B$  и пересекает биссектрису угла в точках  $C$

и  $D$ . Хорда  $AB$  равна  $\sqrt{6}$ , хорда  $CD$  равна  $\sqrt{7}$ . Найти радиус окружности.

129. В параллелограмме лежат две окружности радиуса 1, касающиеся друг друга и трех сторон параллелограмма каждая. Известно также, что один из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания равен  $\sqrt{3}$ . Найти площадь параллелограмма.

130. Окружность радиуса  $R$  проходит через вершины  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  и касается прямой  $AC$  в точке  $A$ . Найти площадь треугольника  $ABC$ , зная, что  $\angle B = \alpha$ ,  $\angle A = \beta$ .

131. В треугольнике  $ABC$  биссектриса  $AK$  перпендикулярна медиане  $BM$ , а угол  $B$  равен  $120^\circ$ . Найти отношение площади треугольника  $ABC$  к площади описанного около этого треугольника круга.

132. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  через середины  $AB$  и  $AC$  проведена окружность, касающаяся стороны  $BC$ . Найти ту часть гипотенузы  $AC$ , которая лежит внутри этой окружности, если  $|AB| = 3$ ,  $|BC| = 4$ .

133. Дан отрезок  $a$ . Три окружности радиуса  $R$  ( $a < 4R$ ) имеют центры в концах отрезка и в его середине. Найти радиус четвертой окружности, касающейся трех данных.

134. Найти угол между общей внешней касательной и общей внутренней касательной к двум окружностям, если их радиусы равны  $R$  и  $r$ , а расстояние между их центрами равно  $\sqrt{2(R^2 + r^2)}$  (центры окружностей находятся по одну сторону от общей внешней касательной и по разные стороны от общей внутренней касательной).

135. Отрезок  $AB$  есть диаметр круга, а точка  $C$  лежит вне этого круга. Отрезки  $AC$  и  $BC$  пересекаются с окружностью в точках  $D$  и  $E$  соответственно. Найти угол  $CBD$ , если площади треугольников  $DCE$  и  $ABC$  относятся как  $1:4$ .

136. В ромбе  $ABCD$  со стороной  $a$  угол при вершине  $A$  равен  $120^\circ$ . Точки  $E$  и  $F$  лежат на сторонах  $BC$  и  $AD$  соответственно, отрезок  $EF$  и диагональ ромба  $AC$  пересекаются в точке  $M$ . Площади четырехугольников  $BEFA$  и  $ECDF$  относятся как  $1:2$ . Найти  $|EM|$ , если  $|AM|:|MC| = 1:3$ .

137. Дана окружность радиуса  $R$  с центром в точке  $O$ . Из конца отрезка  $OA$ , пересекающегося с окружностью в точке  $M$ , проведена касательная к окружности  $AK$ . Найти радиус окружности, касающейся отрезков  $AK$ ,  $AM$  и дуги  $MK$ , если  $\angle OAK = 60^\circ$ .

138. В круг вписан равнобедренный треугольник  $ABC$ , в котором  $|AB| = |BC|$  и  $\angle B = \beta$ . Средняя линия треугольника продолжена до пересечения с окружностью в точках  $D$  и

$E (DE \parallel AC)$ . Найти отношение площадей треугольников  $ABC$  и  $DBE$ .

139. Дан угол  $\alpha$  с вершиной  $O$ . На одной его стороне взята точка  $M$  и восстановлен перпендикуляр в этой точке до пересечения с другой стороной в точке  $N$ . Точно так же в точке  $K$  на другой стороне восстановлен перпендикуляр до пересечения с первой стороной в точке  $P$ . Пусть  $B$  — точка пересечения прямых  $MN$  и  $KP$ , а  $A$  — точка пересечения прямых  $OB$  и  $NB$ . Найти  $|OA|$ , если  $|OM| = a$ ,  $|OP| = b$ .

140. Две окружности радиусов  $R$  и  $r$  касаются сторон данного угла и друг друга. Найти радиус третьей окружности, касающейся сторон того же угла, центр которой находится в точке касания данных окружностей между собой.

141. Расстояние между центрами непересекающихся окружностей равно  $a$ . Доказать, что четыре точки пересечения общих внешних касательных с общими внутренними касательными лежат на одной окружности. Найти радиус этой окружности.

142. Доказать, что отрезок общей внешней касательной к двум окружностям, заключенный между общими внутренними касательными, равен длине общей внутренней касательной.

143. В круге с центром  $O$  проведены два взаимно перпендикулярных радиуса  $OA$  и  $OB$ ,  $C$  — точка на дуге  $AB$  такая, что  $\angle AOC = 60^\circ$  ( $\angle BOC = 30^\circ$ ). Окружность с центром в  $A$  и радиусом  $AB$  пересекает продолжение  $OC$  за точку  $C$  в точке  $D$ . Доказать, что отрезок  $CD$  равен стороне правильного десятиугольника, вписанного в окружность.

Возьмем теперь точку  $M$ , диаметрально противоположную точке  $C$ . Отрезок  $MD$ , увеличенный на  $1/5$  своей длины, принимается приближенно равным полуокружности. Оценить погрешность этого приближенного равенства.

144. Дан прямоугольник со сторонами 7 и 8. Одна вершина правильного треугольника совпадает с вершиной прямоугольника, а две другие находятся на его сторонах, не содержащих этой вершины. Найти площадь правильного треугольника.

145. Найти радиус наименьшей окружности, содержащей равнобокую трапецию с основаниями 15 и 4 и боковыми сторонами, равными 9.

146.  $ABCD$  — прямоугольник, в котором  $|AB| = 9$ ,  $|BC| = 7$ . На стороне  $CD$  взята точка  $M$  так, что  $|CM| = 3$ , а на стороне  $AD$  — точка  $N$  так, что  $|AN| = 2,5$ . Найти радиус наибольшей окружности, которая помещается внутри пятиугольника  $ABCMN$ .

147. Найти наибольший угол треугольника, если известно, что радиус окружности, вписанной в треугольник с вершинами

в основаниях высот данного треугольника, в два раза меньше наименьшей высоты данного треугольника.

148. В треугольнике  $ABC$  биссектриса угла  $C$  перпендикулярна медиане, выходящей из вершины  $B$ . Центр вписанной окружности лежит на окружности, проходящей через точки  $A$ ,  $C$  и центр описанной окружности. Найти  $|AB|$ , если  $|BC| = 1$ .

149. Точка  $M$  удалена от сторон правильного треугольника (от прямых, на которых расположены его стороны) на расстояния 2, 3 и 6. Найти сторону правильного треугольника, если известно, что его площадь меньше 14.

150. Точка  $M$  удалена от сторон угла в  $60^\circ$  на расстояния  $\sqrt{3}$  и  $3\sqrt{3}$  (основания перпендикуляров, опущенных из  $M$  на стороны угла, лежат на сторонах, а не на их продолжениях). Прямая, проходящая через  $M$ , пересекает стороны угла и отсекает треугольник периметра 12. Найти площадь этого треугольника.

151. Дан прямоугольник  $ABCD$ , в котором  $|AB| = 4$ ;  $|BC| = 3$ . Найти сторону ромба, одна вершина которого совпадает с  $A$ , а три другие лежат по одной на отрезках  $AB$ ,  $BC$  и  $BD$ .

152. Дан квадрат  $ABCD$  со стороной 1. Найти сторону ромба, одна вершина которого совпадает с  $A$ , противоположная лежит на прямой  $BD$ , а две оставшиеся — на прямых  $BC$  и  $CD$ .

153. В параллелограмме  $ABCD$  острый угол равен  $\alpha$ . Окружность радиуса  $r$  проходит через вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  и пересекает прямые  $AD$  и  $CD$  в точках  $M$  и  $N$ . Найти площадь треугольника  $BMN$ .

154. Окружность, проходящая через вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  параллелограмма  $ABCD$  пересекает прямые  $AD$  и  $CD$  в точках  $M$  и  $N$ . Точка  $M$  удалена от вершин  $B$ ,  $C$  и  $D$  соответственно на расстояния 4, 3 и 2. Найти  $|MN|$ .

155. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $\angle BAC = \pi/6$ . Окружность с центром в  $A$  и радиусом, равным высоте, опущенной на  $BC$ , делит площадь треугольника пополам. Найти наибольший угол треугольника  $ABC$ .

156. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  известно, что  $\angle B = 120^\circ$ . Найти общую хорду окружности, описанной около  $ABC$ , и окружности, проходящей через центр вписанного круга и основания биссектрис углов  $A$  и  $C$ , если  $|AC| = 1$ .

157. В треугольнике  $ABC$  сторона  $BC$  равна  $a$ , радиус вписанной окружности равен  $r$ . Определить радиусы двух равных окружностей, касающихся друг друга, причем одна из них касается сторон  $BC$  и  $BA$ , а другая —  $BC$  и  $CA$ .

158. В окружность радиуса  $R$  вписана трапеция. Прямые, проходящие через концы одного основания параллельно бо-

ковым сторонам, пересекаются в центре окружности. Боковая сторона видна из центра под углом  $\alpha$ . Найти площадь трапеции.

159. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна  $c$ . В каких пределах может меняться расстояние между центром вписанного круга и точкой пересечения медиан?

160. Стороны параллелограмма равны  $a$  и  $b$  ( $a \neq b$ ). В каких пределах может меняться косинус острого угла между диагоналями?

161. Через точку  $M$  внутри треугольника  $ABC$  проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника. Отрезки прямых, заключенные внутри треугольника, равны между собой. Найти длины этих отрезков, если стороны треугольника равны  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

162. В треугольнике  $ABC$  помещены три равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Все три окружности имеют одну общую точку. Найти радиусы этих окружностей, если радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника  $ABC$  равны  $r$  и  $R$ .

163. В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $AD$ ,  $\angle DAC + \angle ABC = 90^\circ$ . Найти  $\angle BAC$ , если известно, что  $|AB| \neq |AC|$ .

164. Три окружности радиусов 1, 2 и 3 касаются друг друга внешним образом. Найти радиус окружности, проходящей через точки касания этих окружностей.

165. В равнобедренный треугольник вписан квадрат единичной площади, сторона которого лежит на основании треугольника. Найти площадь треугольника, если известно, что центры тяжести треугольника и квадрата совпадают.

166. В равностороннем треугольнике  $ABC$  сторона равна  $a$ . На стороне  $BC$  лежит точка  $D$ , а на  $AB$  — точка  $E$  так, что  $|BD| = a/3$ ,  $|AE| = |DE|$ . Найти  $|CE|$ .

167. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  из вершины прямого угла  $C$  проведены биссектриса  $CL$  ( $|CL| = a$ ) и медиана  $CM$  ( $|CM| = b$ ). Найти площадь треугольника  $ABC$ .

168. В трапецию вписана окружность. Найти площадь трапеции, если известны длина  $a$  одного из оснований и отрезки  $b$  и  $d$ , на которые разделена точкой касания одна из боковых сторон (отрезок  $b$  примыкает к данному основанию  $a$ ).

169. В трапеции диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найти площадь трапеции.

170. Окружность радиуса 1 вписана в треугольник  $ABC$ , в котором  $\cos B = 0,8$ . Эта окружность касается средней линии

треугольника  $ABC$ , параллельной стороне  $AC$ . Найти длину стороны  $AC$ .

171. Дан правильный треугольник  $ABC$  площади  $S$ . Параллельно его сторонам на равном расстоянии от них проведены три прямые, пересекающиеся внутри треугольника и образующие в пересечении треугольник  $A_1B_1C_1$  площади  $Q$ . Найти расстояние между параллельными сторонами треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ .

172. Стороны  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$  перпендикулярны и являются диаметрами двух равных касающихся окружностей радиуса  $r$ . Найти площадь четырехугольника  $ABCD$ , если  $|BC| : |AD| = k$ .

173. В угол, величина которого  $\alpha$ , вписаны две касающиеся друг друга окружности. Определить отношение радиуса меньшей окружности к радиусу третьей окружности, касающейся первых двух и одной из сторон угла.

174. В треугольнике  $ABC$  на средней линии  $DE$ , параллельной  $AB$ , как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны  $AC$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$ . Найти  $|MN|$ , если  $|BC| = a$ ,  $|AC| = b$ ,  $|AB| = c$ .

175. Расстояние между центрами двух окружностей равно  $a$ . Найти сторону ромба, две противоположные вершины которого лежат на одной окружности, а две оставшиеся — на другой, если радиусы этих окружностей равны  $R$  и  $r$ .

176. Найти площадь ромба  $ABCD$ , если радиусы окружностей, описанных около треугольников  $ABC$  и  $ABD$ , равны  $R$  и  $r$ .

177. Дан угол величины  $\alpha$  с вершиной в  $A$  и точка  $B$  на расстоянии  $a$  и  $b$  от сторон угла. Найти  $|AB|$ .

178. Даны  $h_a$  и  $h_b$  — высоты треугольника  $ABC$ , опущенные из вершин  $A$  и  $B$ , и длина  $l$  биссектрисы угла  $C$ . Найти  $\angle C$ .

179. Около прямоугольного треугольника описана окружность. Другая окружность того же радиуса касается катетов этого треугольника, причем одной из точек касания является вершина треугольника. Найти отношение площади треугольника к площади общей части двух данных кругов.

180. В трапеции  $ABCD$  дано:  $|AB| = |BC| = |CD| = a$ ,  $|DA| = 2a$ . На прямых  $AB$  и  $AD$  взяты точки  $E$  и  $F$ , отличные от вершин трапеции, так, что точка пересечения высот треугольника  $CEF$  совпадает с точкой пересечения диагоналей трапеции  $ABCD$ . Найти площадь треугольника  $CEF$ .

\*

\*   \*

181. Высота прямоугольного треугольника  $ABC$ , опущенная на гипотенузу  $AB$ , равна  $h$ ,  $D$  — основание высоты,  $M$  и  $N$  — се-

редины отрезков  $AD$  и  $DB$ . Найти расстояние от вершины  $C$  до точки пересечения высот треугольника  $CMN$ .

182.  $ABCD$  — равнобокая трапеция с основаниями  $AD$  и  $BC$ ;  $|AB| = |CD| = a$ ,  $|AC| = |BD| = b$ ,  $|BC| = c$ ,  $M$  — произвольная точка дуги  $BC$  окружности, описанной около  $ABCD$ .

Найти отношение  $\frac{|BM| + |MC|}{|AM| + |MD|}$ .

183. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 1, основание равно  $a$ . Около треугольника описана окружность. Найти хорду, пересекающую боковые стороны треугольника и делящуюся точками пересечения на три равные отрезка.

184.  $MN$  — диаметр окружности,  $|MN| = 1$ ,  $A$  и  $B$  — точки окружности, расположенные по одну сторону от  $MN$ ,  $C$  — на другой полуокружности. Дано:  $A$  — середина полуокружности,  $|MB| = 3/5$ , длина отрезка, образованного при пересечении диаметра  $MN$  с хордами  $AC$  и  $BC$ , равна  $a$ . Чему равно наибольшее значение  $a$ ?

185.  $ABCD$  — выпуклый четырехугольник,  $M$  — середина  $AB$ ,  $N$  — середина  $CD$ . Известно, что площади треугольников  $ABN$  и  $CDM$  равны, а площадь их общей части в  $k$  раз меньше площади каждого из них. Найти отношение сторон  $BC$  и  $AD$ .

186.  $ABCD$  — равнобокая трапеция ( $AD \parallel BC$ ), в которой острый угол при большем основании равен  $60^\circ$ , а диагональ равна  $\sqrt{3}$ . Точка  $M$  удалена от вершин  $A$  и  $D$  соответственно на расстояния 1 и 3. Найти  $|MC|$ .

187. Биссектриса каждого угла треугольника пересекает противоположную сторону в точке, равноудаленной от середин двух других сторон треугольника. Следует ли из этого, что треугольник — правильный?

188. В треугольнике даны две стороны  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ). Найти третью сторону, если известно, что  $a + h_a \leq b + h_b$ , где  $h_a$  и  $h_b$  — высоты, опущенные на эти стороны ( $h_a$  — высота к стороне  $a$ ).

189.  $ABCD$  — выпуклый четырехугольник, описанный около окружности диаметра 1. Внутри  $ABCD$  существует такая точка  $M$ , что  $|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 + |MD|^2 = 2$ . Найти площадь  $ABCD$ .

190.  $ABCD$  — четырехугольник:  $|AB| = a$ ,  $|BC| = b$ ,  $|CD| = c$ ,  $|DA| = d$ ;  $a^2 + c^2 \neq b^2 + d^2$ ,  $c \neq d$ ,  $M$  — точка прямой  $BD$ , равноудаленная от  $A$  и  $C$ . Найти отношение  $|BM| : |MD|$ .

191. Меньшая сторона прямоугольника  $ABCD$  равна 1. Рассмотрим четыре концентрические окружности с центром в  $A$  и проходящие соответственно через  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и точку пересечения



диагоналей прямоугольника  $ABCD$ . Известно, что существует прямоугольник с вершинами на построенных окружностях (по одной на каждой). Доказать, что существует квадрат с вершинами на построенных окружностях. Найти сторону этого квадрата.

**192.** Дан треугольник  $ABC$ . Перпендикуляры, восстановленные к  $AB$  и  $BC$  в их серединах, пересекают прямую  $AC$  в точках  $M$  и  $N$  так, что  $|MN| = |AC|$ . Перпендикуляры, восстановленные к  $AB$  и  $AC$  в их серединах, пересекают  $BC$  в точках  $K$  и  $L$  так, что  $|KL| = \frac{1}{2}|BC|$ . Найти наименьший угол треугольника  $ABC$ .

**193.** На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  взята точка  $M$  так, что прямая, соединяющая центр описанной около  $ABC$  окружности с точкой пересечения медиан треугольника  $BCM$  перпендикулярна  $CM$ . Найти отношение  $|BM| : |BA|$ , если  $|BC| : |BA| = k$ .

**194.** Во вписанном четырехугольнике  $ABCD$ , в котором  $|AB| = |BC|$ ,  $K$  — точка пересечения диагоналей. Найти  $|AB|$ , если  $|BK| = b$ ,  $|KD| = d$ .

**195.** Интерпретировать геометрически уравнение 1 и системы 2, 3 и 4. Решить уравнение 1 и системы 2 и 3. В системе 4 найти  $x + y + z$ :

$$1) \sqrt{x^2 + a^2 - ax} \sqrt{3} + \sqrt{y^2 + b^2 - by} \sqrt{3} + \sqrt{x^2 + y^2 - xy} \sqrt{3} = \\ = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$2) \begin{cases} x = \sqrt{z^2 - a^2} + \sqrt{y^2 - a^2}, \\ y = \sqrt{x^2 - b^2} + \sqrt{z^2 - b^2}, \\ z = \sqrt{y^2 - c^2} + \sqrt{x^2 - c^2}. \end{cases}$$

$$3) x^2 + y^2 = (a - x)^2 + b^2 = a^2 + (b - y)^2.$$

$$4) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2, \\ y^2 + yz + z^2 = b^2, \\ z^2 + zx + x^2 = a^2 + b^2. \end{cases}$$

**196.** Сторона квадрата равна  $a$ , произведения расстояний от противоположных вершин до прямой  $l$  равны между собой. Найти расстояние от центра квадрата до прямой  $l$ , если известно, что ни одна из сторон квадрата не параллельна  $l$ .

**197.** В треугольнике  $ABC$  одна из сторон в два раза больше другой, кроме того,  $\angle B = 2\angle C$ . Найти углы треугольника.

**198.** Окружность касается равных сторон  $AB$  и  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$ . Пусть  $M$  — точка касания со

стороной  $AB$ ,  $N$  — точка пересечения окружности с основанием  $BC$ . Найти  $|AN|$ , если  $|AM| = a$ ,  $|BM| = b$ .

199.  $ABCD$  — параллелограмм, в котором  $|AB| = k|BC|$ ,  $K$  и  $L$  — точки на прямой  $CD$  ( $K$  — на стороне  $CD$ ), а  $M$  — точка на  $BC$ , причем  $AD$  — биссектриса угла  $KAL$ ,  $AM$  — биссектриса угла  $KAB$ ,  $|BM| = a$ ,  $|DL| = b$ . Найти  $|AL|$ .

200. Дан параллелограмм  $ABCD$ . Прямая, проходящая через вершину  $C$ , пересекает прямые  $AB$  и  $AD$  в точках  $K$  и  $L$ . Площади треугольников  $KBC$  и  $CDL$  равны  $p$  и  $q$ . Найти площадь параллелограмма  $ABCD$ .

201. Дана окружность радиуса  $R$  и две точки  $A$  и  $B$  на ней,  $|AB| = a$ . Две окружности радиусов  $x$  и  $y$  касаются данной в точках  $A$  и  $B$ . Найти: а) отрезок общей внешней касательной к двум последним окружностям, если обе они касаются данной одинаковым образом (внутренним или внешним); б) отрезок общей внутренней касательной, если окружность радиуса  $x$  касается данной внешним образом, а окружность радиуса  $y$  касается данной внутренним образом.

202. В треугольнике  $ABC$  известно:  $|AB| = 12$ ,  $|BC| = 13$ ,  $|CA| = 15$ . На стороне  $AC$  взята точка  $M$  так, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники  $ABM$  и  $BCM$  равны. Найти отношение  $|AM| : |MC|$ .

203. Радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника равны соответственно  $r$  и  $R$ . Найти его площадь, если известно, что окружность, проходящая через центры вписанной и описанной окружностей и через точку пересечения высот треугольника, проходит, по крайней мере, через одну вершину треугольника.

204. Дан прямоугольник  $ABCD$ , в котором  $|AB| = 2a$ ,  $|BC| = a\sqrt{2}$ . На стороне  $AB$  как на диаметре во внешнюю сторону построен полукруг. Пусть  $M$  — произвольная точка на полуокружности, прямая  $MD$  пересекает  $AB$  в точке  $N$ , а прямая  $MC$  — в точке  $L$ . Найти  $|AL|^2 + |BN|^2$  (задача Ферма).

205. Окружности радиусов  $R$  и  $r$  касаются друг друга внутренним образом. Найти сторону правильного треугольника, одна вершина которого совпадает с точкой касания, а две другие лежат на разных данных окружностях.

206. Две окружности радиусов  $R$  и  $r$  ( $R > r$ ) имеют внешнее касание в точке  $A$ . Через точку  $B$ , взятую на большей окружности, проведена прямая линия, касающаяся меньшей окружности в точке  $C$ . Найти  $|BC|$ , если  $|AB| = a$ .

207. В параллелограмме  $ABCD$  находятся три попарно касающиеся окружности, причем одна из них касается также сторон  $AB$  и  $BC$ , другая —  $AB$  и  $AD$ , а третья —  $BC$  и  $AD$ . Найти

радиус третьей окружности, если расстояние между точками касания на стороне  $AB$  равно  $a$ .

**208.** Диагонали четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ , угол между ними равен  $\alpha$ . Пусть  $O_1, O_2, O_3, O_4$  — центры окружностей, описанных соответственно около треугольников  $ABM, BCM, CDM, DAM$ . Определить отношение площадей четырехугольников  $ABCD$  и  $O_1O_2O_3O_4$ .

**209.** В параллелограмме площади  $S$  проведены биссектрисы его внутренних углов. Площадь четырехугольника, получившегося при их пересечении, равна  $Q$ . Найти отношение сторон параллелограмма.

**210.** В треугольнике  $ABC$  на стороне  $AC$  взята точка  $M$ , а на стороне  $BC$  — точка  $N$ . Отрезки  $AN$  и  $BM$  пересекаются в точке  $O$ . Найти площадь треугольника  $CMN$ , если площади треугольников  $OMA, OAB$  и  $OBM$  соответственно равны  $S_1, S_2, S_3$ .

**211.** Точка пересечения медиан прямоугольного треугольника лежит на окружности, вписанной в этот треугольник. Найти острые углы треугольника.

**212.** Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , делит медиану  $BM$  на три равные части. Найти отношение  $|BC| : |CA| : |AB|$ .

**213.** В треугольнике  $ABC$  срединный перпендикуляр к стороне  $AB$  пересекает прямую  $AC$  в точке  $M$ , а срединный перпендикуляр к стороне  $AC$  пересекает прямую  $AB$  в точке  $N$ . Известно, что  $|MN| = |BC|$  и прямая  $MN$  перпендикулярна прямой  $BC$ . Определить углы треугольника  $ABC$ .

**214.** Площадь трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  равна  $S$ ,  $|AD| : |BC| = 3$ ; на прямой, пересекающей продолжение основания  $AD$  за точку  $D$ , расположен отрезок  $EF$  так, что  $AE \parallel DF, BE \parallel CF$  и  $|AE| : |DF| = |CF| : |BE| = 2$ . Определить площадь треугольника  $EFD$ .

**215.** Сторона  $BC$  треугольника  $ABC$  равна  $a$ , радиус вписанного круга  $r$ . Найти площадь треугольника, если вписанный круг касается окружности, построенной на  $BC$  как на диаметре.

**216.** Дан правильный треугольник  $ABC$  со стороной  $a$ ,  $BD$  — его высота. На  $BD$  построен второй правильный треугольник  $BDC_1$  и на высоте  $BD_1$  этого треугольника — третий правильный треугольник  $BD_1C_2$ . Найти радиус окружности, описанной около треугольника  $CC_1C_2$ . Доказать, что ее центр находится на стороне треугольника  $ABC$  ( $C_2$  находится вне треугольника  $ABC$ ).

**217.** Стороны параллелограмма равны  $a$  и  $b$  ( $a \neq b$ ). Через вершины тупых углов этого параллелограмма проведены прямые, перпендикулярные сторонам. Эти прямые при пересе-

чении образуют параллелограмм, подобный исходному. Найти косинус острого угла данного параллелограмма.

218. В треугольнике  $KLM$  проведены биссектрисы  $KN$  и  $LP$ , пересекающиеся в точке  $Q$ . Отрезок  $PN$  имеет длину 1, а вершина  $M$  лежит на окружности, проходящей через точки  $N$ ,  $P$ ,  $Q$ . Найти стороны и углы треугольника  $PNQ$ .

219. На диагонали  $AC$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  находится центр окружности радиуса  $r$ , касающейся сторон  $AB$ ,  $AD$  и  $BC$ . На диагонали  $BD$  находится центр окружности такого же радиуса  $r$ , касающейся сторон  $BC$ ,  $CD$  и  $AD$ . Найти площадь четырехугольника  $ABCD$ , зная, что указанные окружности касаются друг друга внешним образом.

220. Радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ , равен 1. Известно, что на этой окружности лежит центр окружности, проходящей через вершины  $A$ ,  $C$  и точку пересечения высот треугольника  $ABC$ . Найти  $|AC|$ .

221. В треугольнике  $ABC$  взяты точки  $M$ ,  $N$  и  $P$ ;  $M$  и  $N$  — на сторонах  $AC$  и  $BC$ ,  $P$  — на отрезке  $MN$ , причем  $|AM| : |MC| = |CN| : |NB| = |MP| : |PN|$ . Найти площадь треугольника  $ABC$ , если площади треугольников  $AMP$  и  $BNP$  равны  $T$  и  $Q$ .

222. Дана окружность радиуса  $R$  и точка  $A$  на расстоянии  $a$  от ее центра ( $a > R$ ). Пусть  $K$  — ближайшая к  $A$  точка окружности. Секущая, проходящая через  $A$ , пересекает окружность в точках  $M$  и  $N$ . Найти  $|MN|$ , если площадь треугольника  $KMN$  равна  $S$ .

223. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $|AB| = |BC|$ ) через конец  $E$  биссектрисы  $AE$  проведен перпендикуляр к  $AE$  до пересечения с продолжением стороны  $AC$  в точке  $F$  ( $C$  — между  $A$  и  $F$ ). Известно, что  $|AC| = 2m$ ,  $|FC| = m/4$ . Найти площадь треугольника  $ABC$ .

224. Два одинаковых правильных треугольника  $ABC$  и  $CDE$  со стороной 1 расположены на плоскости так, что имеют только одну общую точку  $C$  и угол  $BCD$  меньше, чем  $\pi/3$ . Точка  $K$  — середина  $AC$ , точка  $L$  — середина  $CE$ , точка  $M$  — середина  $BD$ . Площадь треугольника  $KLM$  равна  $\sqrt{3}/5$ . Найти  $|BD|$ .

225. Из точки  $K$ , расположенной вне окружности с центром  $O$ , проведены к этой окружности две касательные  $KM$  и  $KN$  ( $M$  и  $N$  — точки касания). На хорде  $MN$  взята точка  $C$  ( $|MC| < |CN|$ ). Через точку  $C$  перпендикулярно к отрезку  $OC$  проведена прямая, пересекающая отрезок  $NK$  в точке  $B$ . Известно, что радиус окружности равен  $R$ ,  $\angle MKN = \alpha$ ,  $|MC| = b$ . Найти  $|CB|$ .

226. Пятиугольник  $ABCDE$  вписан в окружность. Точки  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  и  $P$  являются основаниями перпендикуляров, опущенных

из вершины  $E$  соответственно на стороны  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  (или их продолжения) и диагональ  $AD$ . Известно, что  $|EP| = d$ , а отношение площади треугольника  $MQE$  к площади треугольника  $PNE$  равно  $k$ . Найти  $|EM|$ .

**227.** Дана прямоугольная трапеция. Известно, что некоторая прямая, параллельная основаниям, пересекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Определить основания исходной трапеции, если ее боковые стороны равны  $c$  и  $d$  ( $d > c$ ).

**228.** На боковых сторонах  $KL$  и  $MN$  равнобокой трапеции  $KLMN$  выбраны соответственно точки  $P$  и  $Q$  так, что отрезок  $PQ$  параллелен основаниям трапеции. Известно, что в каждую из трапеций  $KPQN$  и  $PLMQ$  можно вписать окружность и радиусы этих окружностей равны  $R$  и  $r$  соответственно. Определить основания  $|LM|$  и  $|KN|$ .

**229.** В треугольнике  $ABC$  биссектриса угла  $A$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $D$ . Известно, что  $|AB| - |BD| = a$ ,  $|AC| + |CD| = b$ . Найти  $|AD|$ .

**230.** Используя результат предыдущей задачи, доказать, что квадрат биссектрисы треугольника равен произведению сторон, ее заключающих, минус произведение отрезков третьей стороны, на которые она разделена биссектрисой.

**231.** Дана окружность с диаметром  $AB$ . Вторая окружность с центром в  $A$  пересекает первую окружность в точках  $C$  и  $D$  и диаметр в точке  $E$ . На дуге  $CE$ , не содержащей точки  $D$ , взята точка  $M$ , отличная от точек  $C$  и  $E$ . Луч  $BM$  пересекает первую окружность в точке  $N$ . Известно, что  $|CN| = a$ ,  $|DN| = b$ . Найти  $|MN|$ .

**232.** В треугольнике  $ABC$  угол  $B$  равен  $\pi/4$ , угол  $C$  равен  $\pi/6$ . На медианах  $BN$  и  $CN$  как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Хорда  $PQ$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $D$ . Найти отношение  $|BD| : |DC|$ .

**233.** Пусть  $AB$  — диаметр окружности,  $O$  — ее центр,  $|AB| = 2R$ ,  $C$  — точка на окружности,  $M$  — точка на  $AC$ . Из  $M$  опущен перпендикуляр  $MN$  на  $AB$  и восстановлен перпендикуляр к  $AC$ , пересекающий окружность в точке  $L$  (отрезок  $CL$  пересекает  $AB$ ). Найти расстояние между серединой  $AO$  и серединой  $CL$ , если  $|AN| = a$ .

**234.** Около треугольника  $ABC$  описана окружность. Касательная к окружности, проходящая через точку  $B$ , пересекает прямую  $AC$  в точке  $M$ . Найти отношение  $|AM| : |MC|$ , если  $|AB| : |BC| = k$ .

**235.** На прямой последовательно расположены точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , причем  $|AC| = \alpha|AB|$ ,  $|AD| = \beta|AB|$ . Через  $A$  и  $B$  проведена произвольная окружность,  $CM$  и  $DN$  — две касательные

к этой окружности ( $M$  и  $N$  — точки на окружности, лежащие по разные стороны от прямой  $AB$ ). В каком отношении прямая  $MN$  делит отрезок  $AB$ ?

**236.**  $ABCD$  — описанный четырехугольник, отрезки от  $A$  до точек касания равны  $a$ , отрезки от  $C$  до точек касания равны  $b$ . В каком отношении диагональ  $AC$  делится диагональю  $BD$ ?

**237.** Точка  $K$  лежит на основании  $AD$  трапеции  $ABCD$ , причем  $|AK| = \lambda |AD|$ . Найти отношение  $|AM| : |MD|$ , где  $M$  — точка пересечения с  $AD$  прямой, проходящей через точки пересечения прямых  $AB$  и  $CD$  и прямых  $BK$  и  $AC$ .

Беря  $\lambda = 1/n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), получить способ деления данного отрезка на  $n$  равных частей с помощью одной линейки, если дана прямая, ему параллельная.

**238.** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с гипотенузой  $AB$ , равной  $c$ , на высоте  $CD$  как на диаметре построена окружность. Касательные к этой окружности, проходящие через точки  $A$  и  $B$ , касаются ее в точках  $M$  и  $N$  и пересекаются при продолжении в точке  $K$ . Найти  $|MK|$ .

**239.** На сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$  так, что  $|AC_1| : |C_1B| = |BA_1| : |A_1C| = |CB_1| : |B_1A| = k$ . На сторонах  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$  и  $C_1A_1$  взяты точки  $C_2$ ,  $A_2$  и  $B_2$  так, что  $|A_1C_2| : |C_2B_1| = |B_1A_2| : |A_2C_1| = |C_1B_2| : |B_2A_1| = 1/k$ . Доказать, что треугольник  $A_2B_2C_2$  подобен треугольнику  $ABC$ , и найти коэффициент подобия.

**240.** В треугольнике  $ABC$  даны  $R$  и  $r$  — радиусы описанной и вписанной окружностей. Пусть  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  — точки пересечения биссектрис треугольника  $ABC$  с описанной окружностью. Найти отношение площадей треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ .

**241.** Имеются два треугольника с соответственно параллельными сторонами и площадями  $S_1$  и  $S_2$ , причем один из них вписан в треугольник  $ABC$ , а другой около него описан. Найти площадь треугольника  $ABC$ .

**242.** Определить угол  $A$  треугольника  $ABC$ , если известно, что биссектриса этого угла перпендикулярна прямой, проходящей через точку пересечения высот и центр описанной окружности этого треугольника.

**243.** Найти углы треугольника, если известно, что расстояние между центром описанной окружности и точкой пересечения высот вдвое меньше наибольшей стороны и равно наименьшей стороне.

**244.** Дан треугольник  $ABC$ . На луче  $BA$  возьмем точку  $D$  так, что  $|BD| = |BA| + |AC|$ . Пусть  $K$  и  $M$  — две точки на лучах  $BA$  и  $BC$  соответственно таких, что площадь треугольни-

ка  $BDM$  равна площади треугольника  $BCK$ . Найти  $\angle BKM$ , если  $\angle BAC = \alpha$ .

**245.** В трапеции  $ABCD$  боковая сторона  $AB$  перпендикулярна  $AD$  и  $BC$ , причем  $|AB| = \sqrt{|AD| \cdot |BC|}$ . Пусть  $E$  — точка пересечения непараллельных сторон трапеции,  $O$  — точка пересечения диагоналей,  $M$  — середина  $AB$ . Найти  $\angle EOM$ .

**246.** На плоскости даны две прямые, пересекающиеся в точке  $O$ , и две точки  $A$  и  $B$ . Обозначим основания перпендикуляров, опущенных из  $A$  на данные прямые, через  $M$  и  $N$ , а основания перпендикуляров, опущенных из  $B$ , — соответственно через  $K$  и  $L$ . Найти угол между прямыми  $MN$  и  $KL$ , если  $\angle AOB = \alpha \leq 90^\circ$ .

**247.** Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке  $A$ . Из  $O$  — центра большей окружности — проведен радиус  $OB$ , касающийся меньшей окружности в точке  $C$ . Найти  $\angle BAC$ .

**248.** Внутри квадрата  $ABCD$  взята точка  $M$  так, что  $\angle MAB = 60^\circ$ ,  $\angle MCD = 15^\circ$ . Найти  $\angle MBC$ .

**249.** В треугольнике  $ABC$  известны углы:  $\angle A = 45^\circ$ ,  $\angle B = 15^\circ$ . На продолжении стороны  $AC$  за точку  $C$  взята точка  $M$  так, что  $|CM| = 2|AC|$ . Найти  $\angle AMB$ .

**250.** В треугольнике  $ABC$ , в котором  $\angle B = 60^\circ$ , биссектриса угла  $A$  пересекает  $BC$  в точке  $M$ . На стороне  $AC$  взята точка  $K$  так, что  $\angle AMK = 30^\circ$ . Найти  $\angle OKC$ , где  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $AMC$ .

**251.** Дан треугольник  $ABC$ , причем  $|AB| = |AC|$ ,  $\angle A = 80^\circ$ . а) Внутри треугольника взята точка  $M$  такая, что  $\angle MBC = 30^\circ$ ,  $\angle MCB = 10^\circ$ . Найти  $\angle AMC$ . б) Вне треугольника взята точка  $P$  так, что  $\angle PBC = \angle PCA = 30^\circ$  и отрезок  $BP$  пересекает сторону  $AC$ . Найти  $\angle PAC$ .

**252.** В треугольнике  $ABC$  дано:  $\angle B = 100^\circ$ ,  $\angle C = 65^\circ$ ; на  $AB$  взята точка  $M$  так, что  $\angle MCB = 55^\circ$ , а на  $AC$  — точка  $N$  так, что  $\angle NBC = 80^\circ$ . Найти  $\angle NMC$ .

**253.** В треугольнике  $ABC$  дано:  $|AB| = |BC|$ ,  $\angle B = 20^\circ$ ; на  $AB$  взята точка  $M$  так, что  $\angle MCA = 60^\circ$ , а на  $CB$  — точка  $N$  так, что  $\angle NAC = 50^\circ$ . Найти  $\angle NMC$ .

**254.** В треугольнике  $ABC$  дано:  $\angle B = 70^\circ$ ,  $\angle C = 50^\circ$ ; на  $AB$  взята точка  $M$  так, что  $\angle MCB = 40^\circ$ , а на  $AC$  — точка  $N$  так, что  $\angle NBC = 50^\circ$ . Найти  $\angle NMC$ .

**255.** Пусть  $M$  и  $N$  — точки касания вписанной окружности со сторонами  $BC$  и  $BA$  треугольника  $ABC$ ,  $K$  — точка пересечения биссектрисы угла  $A$  с прямой  $MN$ . Доказать, что  $\angle AKC = 90^\circ$ .

**256.** Пусть  $P$  и  $Q$  — такие две различные точки окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , что  $|PA|^2 = |PB| \cdot |PC|$ ,

$|QA|^2 = |QB| \cdot |QC|$  (одна из точек — на дуге  $AB$ , другая — на дуге  $AC$ ). Найти разность  $\angle PAB - \angle QAC$ , если разность углов  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  равна  $\alpha$ .

**257.** На данной окружности взяты две фиксированные точки  $A$  и  $B$ ,  $\cup AB = \alpha$ . Произвольная окружность проходит через точки  $A$  и  $B$ . Через  $A$  также проведена произвольная прямая  $l$ , вторично пересекающая окружности в точках  $C$  и  $D$  ( $C$  — на данной окружности). Касательные к окружностям в точках  $C$  и  $D$  ( $C$  и  $D$  — точки касания) пересекаются в точке  $M$ ;  $N$  — точка на  $l$  такая, что  $|CN| = |AD|$ ,  $|DN| = |CA|$ . Какие значения может принимать  $\angle CMN$ ?

**258.** Доказать, что если в треугольнике один угол равен  $120^\circ$ , то треугольник, образованный основаниями его биссектрис, прямоугольный.

**259.** В четырехугольнике  $ABCD$  дано:  $\angle DAB = 150^\circ$ ,  $\angle DAC + \angle ABD = 120^\circ$ ,  $\angle DBC - \angle ABD = 60^\circ$ . Найти  $\angle BDC$ .

\*  
\*   \*

**260.** В треугольнике  $ABC$  дано:  $|AB| = 1$ ,  $|AC| = 2$ . Найти  $|BC|$ , если известно, что биссектрисы внешних углов  $A$  и  $C$  равны между собой (рассматриваются отрезки от вершины до точки пересечения соответствующей биссектрисы с прямой, на которой лежит противоположная сторона треугольника).

**261.** На стороне  $CB$  треугольника  $ABC$  взята точка  $D$  так, что  $|CD| = \alpha |AC|$ . Радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , равен  $R$ . Найти расстояние между центром окружности, описанной около треугольника  $ABC$  и центром окружности, описанной около треугольника  $ADB$ .

**262.** Около прямоугольного треугольника  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) описана окружность. Пусть  $CD$  — высота треугольника. Окружность с центром в  $D$  проходит через середину дуги  $AB$  и пересекает  $AB$  в точке  $M$ . Найти  $|CM|$ , если  $|AB| = c$ .

**263.** Найти периметр треугольника  $ABC$ , если  $|BC| = a$  и отрезок прямой, касательной к вписанному кругу и параллельной  $BC$ , заключенный внутри треугольника, равен  $b$ .

**264.** В треугольнике проведены три прямые, параллельные его сторонам и касающиеся вписанной окружности. Они отсекают от данного треугольника три треугольника. Радиусы окружностей, описанных около них, равны  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ . Найти радиус окружности, описанной около данного треугольника.

**265.** В окружности радиуса  $R$  проведены хорды  $AB$  и  $AC$ . На  $AB$  или на ее продолжении за точку  $B$  взята точка  $M$ , рас-



стояние от которой до прямой  $AC$  равно  $|AC|$ . Аналогично, на  $AC$  или на продолжении ее за точку  $C$  взята точка  $N$ , расстояние от которой до прямой  $AB$  равно  $|AB|$ . Найти  $|MN|$ .

266. Дана окружность радиуса  $R$  с центром  $O$ . Две другие окружности касаются данной изнутри и пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Найти сумму радиусов двух последних окружностей, если известно, что  $\angle OAB = 90^\circ$ .

267. В круге радиуса  $R$  проведены две пересекающиеся перпендикулярные между собой хорды. Найти: а) сумму квадратов четырех отрезков этих хорд, на которые они делятся точкой пересечения; б) сумму квадратов хорд, если расстояние от центра круга до их точки пересечения равно  $a$ .

268. Даны две concentрические окружности радиусов  $r$  и  $R$  ( $r < R$ ). Через некоторую точку  $P$  меньшей окружности проведена прямая, пересекающая большую окружность в точках  $B$  и  $C$ . Перпендикуляр к  $BC$  в точке  $P$  пересекает меньшую окружность в точке  $A$ . Найти  $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2$ .

269. В полукруге из концов диаметра проведены две пересекающиеся хорды. Доказать, что сумма произведений отрезка каждой хорды, примыкающего к диаметру, на всю хорду равна квадрату диаметра.

270. Пусть  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  — длины сторон вписанного четырехугольника ( $a$  и  $c$  — противоположные стороны),  $h_a$ ,  $h_b$ ,  $h_c$  и  $h_d$  — расстояния от центра описанного круга до соответствующих сторон. Доказать, что если центр круга — внутри четырехугольника, то  $ah_c + ch_a = bh_d + dh_b$ .

271. Противоположные стороны четырехугольника, вписанного в окружность, пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Найти  $|PQ|$ , если касательные к окружности, проведенные из  $P$  и  $Q$ , равны  $a$  и  $b$ .

272. В окружность радиуса  $R$  вписан четырехугольник. Пусть  $P$ ,  $Q$  и  $M$  — соответственно точки пересечения диагоналей этого четырехугольника и продолжений противоположных сторон. Найти стороны треугольника  $PQM$ , если расстояния от  $P$ ,  $Q$  и  $M$  до центра окружности равны  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

273. Четырехугольник  $ABCD$  описан около окружности радиуса  $r$ . Точка касания окружности со стороной  $AB$  делит эту сторону на отрезки  $a$  и  $b$ , а точка касания окружности со стороной  $AD$  делит ее на отрезки  $a$  и  $c$ . В каких пределах может меняться  $r$ ?

274. Окружность радиуса  $r$  касается изнутри окружности радиуса  $R$ ;  $A$  — точка касания. Прямая, перпендикулярная линии центров, пересекает одну окружность в точке  $B$ , другую — в точке  $C$ . Найти радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .

275. Две окружности радиусов  $R$  и  $r$  пересекаются;  $A$  — одна из точек пересечения,  $BC$  — общая касательная ( $B$  и  $C$  — точки касания). Найти радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .

276. В четырехугольнике  $ABCD$  дано:  $|AB| = a$ ,  $|AD| = b$ ; стороны  $BC$ ,  $CD$  и  $AD$  касаются некоторой окружности, центр которой находится в середине  $AB$ . Найти  $|BC|$ .

277. Во вписанном четырехугольнике  $ABCD$  дано:  $|AB| = a$ ,  $|AD| = b$  ( $a > b$ ). Найти  $|BC|$ , если известно, что  $BC$ ,  $CD$  и  $AD$  касаются некоторой окружности, центр которой находится на  $AB$ .

\*  
\*   \*  
\*

278. Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ , в котором  $|AB| = |AD|$ . Внутри треугольника  $ABC$  взята точка  $M$  так, что  $\angle MBA = \angle ADC$ ,  $\angle MCA = \angle ACD$ . Найти  $\angle MAC$ , если  $\angle BAC = \alpha$ ,  $\angle ADC - \angle ACD = \varphi$ ,  $|AM| < |AB|$ .

279. Две пересекающиеся окружности вписаны в один угол;  $A$  — вершина угла,  $B$  — одна из точек пересечения окружностей,  $C$  — середина хорды, концами которой являются точки касания первой окружности со сторонами угла. Найти  $\angle ABC$ , если известно, что общая хорда видна из центра второй окружности под углом  $\alpha$ .

280.  $ABC$  — равнобедренный треугольник;  $|AC| = |BC|$ ,  $BD$  — биссектриса,  $BDEF$  — прямоугольник. Найти  $\angle BAF$ , если  $\angle BAE = 120^\circ$ .

281. Около треугольника  $ABC$  описана окружность с центром в точке  $O$ . Касательная к окружности в точке  $C$  пересекается с прямой, делящей пополам угол  $B$ , в точке  $K$ , причем угол  $BKC$  равен половине разности утроенного угла  $A$  и угла  $C$  треугольника. Сумма сторон  $AC$  и  $AB$  равна  $2 + \sqrt{3}$ , а сумма расстояний от точки  $O$  до сторон  $AC$  и  $AB$  равна 2. Найти радиус окружности.

282. Точки, симметричные вершинам треугольника относительно противоположных сторон, являются вершинами треугольника со сторонами  $\sqrt{8}$ ,  $\sqrt{8}$ ,  $\sqrt{14}$ . Определить стороны исходного треугольника, если известно, что длины их различны.

283. В треугольнике  $ABC$  угол между медианой и высотой, выходящими из угла  $A$ , равен  $\alpha$ , угол между медианой и высотой, выходящими из угла  $B$ , равен  $\beta$ . Найти угол между медианой и высотой, выходящими из угла  $C$ .

284. Радиус круга, описанного около треугольника, равен  $R$ . Расстояние от центра этого круга до точки пересечения медиан

треугольника равно  $d$ . Найти произведение площади данного треугольника и треугольника, образованного прямыми, проходящими через его вершины перпендикулярно медианам, из этих вершин выходящим.

**285.** Точки  $A_1$ ,  $A_3$  и  $A_5$  расположены на одной прямой, а точки  $A_2$ ,  $A_4$ ,  $A_6$  — на другой прямой, пересекающейся с первой. Найти угол между этими прямыми, если известно, что стороны шестиугольника (возможно самопересекающегося)  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  равны между собой.

**286.** Две окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  касаются изнутри окружности радиуса  $R$  с центром  $O$ . Известно, что  $|O_1O_2| = a$ . Прямая, касающаяся первых двух окружностей и пересекающая отрезок  $O_1O_2$ , пересекается с их общими внешними касательными в точках  $M$  и  $N$  и с большей окружностью в точках  $A$  и  $B$ . Найти отношение  $|AB| : |MN|$ , если: а) отрезок  $O_1O_2$  содержит точку  $O$ ; б) окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  касаются друг друга.

**287.** Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается стороны  $AC$  в точке  $M$ , стороны  $BC$  — в точке  $N$ ; биссектриса угла  $A$  пересекает прямую  $MN$  в точке  $K$ , а биссектриса угла  $B$  пересекает прямую  $MN$  в точке  $L$ . Доказать, что из отрезков  $MK$ ,  $NL$  и  $KL$  можно сложить треугольник. Найти площадь этого треугольника, если площадь треугольника  $ABC$  равна  $S$ , угол  $C$  равен  $\alpha$ .

**288.** На сторонах  $AB$  и  $BC$  квадрата  $ABCD$  взяты две точки  $M$  и  $N$  так, что  $|BM| + |BN| = |AB|$ . Доказать, что прямые  $DM$  и  $DN$  делят диагональ  $AC$  на три отрезка, из которых можно сложить треугольник, причем один угол этого треугольника равен  $60^\circ$ .

**289.** Дан равнобедренный треугольник  $ABC$ ;  $|AB| = |BC|$ ,  $AD$  — биссектриса. Перпендикуляр, восстановленный к  $AD$  в точке  $D$ , пересекает продолжение  $AC$  в точке  $E$ , основания перпендикуляров, опущенных из  $B$  и  $D$  на  $AC$ , —  $M$  и  $N$  соответственно. Найти  $|MN|$ , если  $|AE| = a$ .

**290.** Из точки  $A$  под углом  $\alpha$  выходят два луча. На одном луче взяты две точки  $B$  и  $B_1$ , а на другом —  $C$  и  $C_1$ . Найти общую хорду окружностей, описанных около треугольников  $ABC$  и  $AB_1C_1$ , если  $|AB| - |AC| = |AB_1| - |AC_1| = a$ .

**291.** Пусть  $O$  — центр окружности,  $C$  — точка на окружности,  $M$  — середина  $OC$ . Точки  $A$  и  $B$  лежат на окружности по одну сторону от прямой  $OC$  так, что  $\angle AMO = \angle BMC$ . Найти  $|AB|$ , если  $|AM| - |BM| = a$ .

**292.** Пусть  $A$ ,  $B$  и  $C$  — три точки на одной прямой. На  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  как на диаметрах построены три полукруга по одну сторону от прямой. Центр окружности, касающейся всех трех

полукругов, находится на расстоянии  $d$  от прямой  $AC$ . Найти радиус этой окружности.

**293.** В окружности радиуса  $R$  проведена хорда  $AB$ . Пусть  $M$  — произвольная точка окружности. На луче  $MA$  отложим отрезок  $MN$  ( $|MN| = R$ ), а на луче  $MB$  — отрезок  $MK$ , равный расстоянию от  $M$  до точки пересечения высот треугольника  $MAV$ . Найти  $|NK|$ , если меньшая из дуг, стягиваемых  $AB$ , равна  $2\alpha$ .

**294.** Высота, опущенная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника на гипотенузу, делит треугольник на два треугольника, в каждый из которых вписана окружность. Определить углы и площадь треугольника, образованного катетами исходного треугольника и прямой, проходящей через центры окружностей, если высота исходного треугольника равна  $h$ .

**295.** Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна  $h$ . Доказать, что вершины острых углов треугольника и проекции основания высоты на катеты лежат на одной окружности. Определить длину хорды, отсекаемой на прямой, содержащей высоту, этой окружностью, и отрезки хорды, на которые она делится гипотенузой.

**296.** Окружность радиуса  $R$  касается прямой  $l$  в точке  $A$ ,  $AB$  — диаметр этой окружности,  $BC$  — произвольная хорда. Пусть  $D$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $C$  на  $AB$ . Точка  $E$  лежит на продолжении  $CD$  за точку  $D$ , причем  $|ED| = |BC|$ . Касательные к окружности, проходящие через  $E$ , пересекают прямую  $l$  в точках  $K$  и  $N$ . Найти  $|KN|$ .

**297.** В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  дано:  $|AB| = a$ ,  $|AD| = b$ ,  $|BC| = p - a$ ,  $|DC| = p - b$ . Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей. Обозначим через  $\alpha$  угол  $BAC$ . К чему стремится  $|AO|$ , если  $\alpha \rightarrow 0$ ?

## II. ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ ПЛАНИМЕТРИИ

---

### § 1. Теорема Карно

1. Даны две точки  $A$  и  $B$ . Доказать, что геометрическое место точек  $M$  таких, что  $|AM|^2 - |MB|^2 = k$  (где  $k$  — данное число), есть прямая, перпендикулярная  $AB$ .

2. Пусть расстояния от некоторой точки  $M$  до вершин  $A$ ,  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  выражаются числами  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Доказать, что ни при каком  $d \neq 0$  ни для одной точки плоскости расстояния до вершин в том же порядке не могут выражаться числами  $\sqrt{a^2 + d}$ ,  $\sqrt{b^2 + d}$ ,  $\sqrt{c^2 + d}$ .

3. Теорема Карно. Доказать, что для того чтобы перпендикуляры, опущенные из точек  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  на стороны  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы  $|A_1B|^2 - |BC_1|^2 + |C_1A|^2 - |AB_1|^2 + |B_1C|^2 - |CA_1|^2 = 0$ .

4. Доказать, что если перпендикуляры, опущенные из точек  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  на прямые  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  соответственно, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  на прямые  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$  и  $A_1B_1$ , также пересекаются в одной точке.

5. Дан четырехугольник  $ABCD$ . Пусть  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — точки пересечения высот треугольников  $BCD$ ,  $ACD$  и  $ABD$ . Доказать, что перпендикуляры, опущенные из  $A$ ,  $B$  и  $C$  на прямые  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$  и  $A_1B_1$  соответственно, пересекаются в одной точке.

6. Даны две точки  $A$  и  $B$ . Доказать, что геометрическое место точек  $M$  таких, что  $k|AM|^2 + l|BM|^2 = d$  ( $k$ ,  $l$ ,  $d$  — данные числа,  $k + l \neq 0$ ) есть или окружность с центром на прямой  $AB$ , или точка, или пустое множество.

7. Пусть  $A_1$ ,  $A_2$ , ...,  $A_n$  — фиксированные точки,  $k_1$ ,  $k_2$ , ...,  $k_n$  — данные числа. Тогда геометрическим местом точек  $M$  таких, что сумма  $k_1|A_1M|^2 + k_2|A_2M|^2 + \dots + k_n|A_nM|^2$  постоянна, будет: а) окружность, точка или пустое множество, если  $k_1 + k_2 + \dots + k_n \neq 0$ ; б) прямая, пустое множество или вся плоскость, если  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = 0$ .

8. Даны окружность и точка  $A$  вне ее. Пусть окружность, проходящая через  $A$ , касается данной в произвольной точке  $B$ , а касательные к ней, проведенные через точки  $A$  и  $B$ , пересекаются в точке  $M$ . Найти геометрическое место точек  $M$ .

9. Даны две точки  $A$  и  $B$ . Найти геометрическое место точек  $M$  таких, что  $|AM| : |MB| = k \neq 1$ .

10. Три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  расположены на одной прямой ( $B$  — между  $A$  и  $C$ ). Возьмем произвольную окружность с центром в  $B$  и обозначим через  $M$  точку пересечения касательных, проведенных из  $A$  и  $C$  к этой окружности. Найти геометрическое место точек  $M$  таких, что точки касания  $AM$  и  $CM$  с окружностью лежат внутри отрезков  $AM$  и  $CM$ .

11. Даны две окружности. Найти геометрическое место точек  $M$  таких, что отношение длин касательных, проведенных из  $M$  к данным окружностям, равно постоянной величине  $k$ .

12. Пусть прямая пересекает одну окружность в точках  $A$  и  $B$ , а другую — в точках  $C$  и  $D$ . Доказать, что точки пересечения касательных к первой окружности, проведенных в точках  $A$  и  $B$  с касательными, проведенными ко второй окружности в точках  $C$  и  $D$  (рассматриваются точки, в которых пересекаются касательные к разным окружностям), лежат на одной окружности, центр которой находится на прямой, проходящей через центры данных окружностей.

13. Возьмем три окружности, каждая из которых касается одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон. Доказать, что перпендикуляры, восставленные к сторонам треугольника в точках касания этих окружностей, пересекаются в одной точке.

14. Дан треугольник  $ABC$ . Рассмотрим всевозможные пары точек  $M_1$  и  $M_2$  таких, что  $|AM_1| : |BM_1| : |CM_1| = |AM_2| : |BM_2| : |CM_2|$ . Доказать, что все прямые  $M_1M_2$  проходят через фиксированную точку плоскости.

15. Расстояния от точки  $M$  до вершин  $A$ ,  $B$  и  $C$  треугольника равны соответственно 1, 2 и 3, а от точки  $M_1$  — соответственно 3,  $\sqrt{15}$ , 5. Доказать, что прямая  $MM_1$  проходит через центр круга, описанного около треугольника  $ABC$ .

16. Пусть  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  — основания перпендикуляров, опущенных из вершин  $A$ ,  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  на прямую  $l$ . Доказать, что перпендикуляры, опущенные из  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  соответственно на  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ , пересекаются в одной точке.

17. Дан правильный треугольник  $ABC$  и произвольная точка  $D$ ;  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — центры окружностей, вписанных в треугольники  $BCD$ ,  $CAD$  и  $ABD$ . Доказать, что перпендикуляры,

опущенные из вершин  $A$ ,  $B$  и  $C$  на  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$  и  $A_1B_1$  соответственно, пересекаются в одной точке.

18. Даны три попарно пересекающиеся окружности. Доказать, что три общие хорды этих окружностей проходят через одну точку.

19. На прямых  $AB$  и  $AC$  взяты точки  $M$  и  $N$  соответственно. Доказать, что общая хорда двух окружностей с диаметрами  $CM$  и  $BN$  проходит через точку пересечения высот треугольника  $ABC$ .

20. На плоскости дана окружность и точка  $N$ . Пусть  $AB$  — произвольная хорда окружности. Обозначим через  $M$  точку пересечения прямой  $AB$  и касательной в точке  $N$  к окружности, описанной около треугольника  $ABN$ . Найти геометрическое место точек  $M$ .

21. Внутри окружности взята точка  $A$ . Найти геометрическое место точек пересечения касательных, проведенных к окружности в концах всевозможных хорд, проходящих через точку  $A$ .

22. Даны числа  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $k$ . Пусть  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — расстояния от точки  $M$  внутри треугольника до его сторон. Доказать, что геометрическое место точек  $M$  таких, что  $\alpha x + \beta y + \gamma z = k$  или пусто, или отрезок, или совпадает со множеством всех точек треугольника.

23. Найти геометрическое место точек  $M$ , расположенных внутри данного треугольника и таких, что расстояния от  $M$  до сторон данного треугольника равны сторонам некоторого треугольника.

24. Пусть  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — середины сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$ . На перпендикулярах, опущенных из некоторой точки  $M$  соответственно на стороны  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ , взяты точки  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$ . Доказать, что перпендикуляры, опущенные из  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  соответственно на прямые  $B_2C_2$ ,  $C_2A_2$  и  $A_2B_2$ , пересекаются в одной точке.

25. Дана прямая  $l$  и три прямые  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$ , перпендикулярные  $l$ . Пусть  $A$ ,  $B$  и  $C$  три фиксированные точки на прямой  $l$ ;  $A_1$  — произвольная точка на  $l_1$ ,  $B_1$  — на  $l_2$ ,  $C_1$  — на  $l_3$ . Доказать, что если при каком-то положении точек  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  перпендикуляры, опущенные из  $A$ ,  $B$  и  $C$  на прямые  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$  и  $A_1B_1$  соответственно, пересекаются в одной точке, то эти перпендикуляры будут пересекаться в одной точке всегда.

26.  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  — высоты треугольника  $ABC$ ,  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$  — проекции  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно на  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$  и  $A_1B_1$ . Доказать, что перпендикуляры, опущенные из  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$  соответственно на  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ , пересекаются в одной точке.

## § 2. Теоремы Чевы и Менелая. Аффинные задачи

27. Доказать, что площадь треугольника, стороны которого равны медианам данного, составляет  $3/4$  площади данного треугольника.

28. Дан параллелограмм  $ABCD$ ; прямая, параллельная  $BC$ , пересекает  $AB$  и  $CD$  соответственно в точках  $E$  и  $F$ , прямая, параллельная  $AB$ , пересекает  $BC$  и  $DA$  соответственно в точках  $G$  и  $H$ .

Доказать, что прямые  $EH$ ,  $GF$  и  $BD$  пересекаются в одной точке или параллельны.

29.  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  — четыре фиксированные точки на прямой  $l$ . Через  $A$  и  $B$  проведены произвольно две параллельные прямые, через  $C$  и  $D$  — две другие параллельные прямые. Проведенные прямые образуют параллелограмм. Доказать, что диагонали этого параллелограмма пересекают  $l$  в двух фиксированных точках.

30. Дан четырехугольник  $ABCD$ ;  $O$  — точка пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$ ,  $M$  — точка на  $AC$  такая, что  $|AM| = |OC|$ ,  $N$  — точка на  $BD$  такая, что  $|BN| = |OD|$ ,  $K$  и  $L$  — середины  $AC$  и  $BD$ . Доказать, что прямые  $ML$ ,  $NK$ , а также прямая, соединяющая точки пересечения медиан треугольников  $ABC$  и  $ACD$ , пересекаются в одной точке.

31. На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1$  и  $A_2$ , симметричные относительно середины  $BC$ . Точно так же на стороне  $AC$  взяты точки  $B_1$  и  $B_2$ , а на стороне  $AB$  —  $C_1$  и  $C_2$ . Доказать, что треугольники  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  равновелики, а центры тяжести треугольников  $A_1B_1C_1$ ,  $A_2B_2C_2$  и  $ABC$  лежат на одной прямой.

32. Через  $M$  — точку пересечения медиан треугольника  $ABC$  проведена прямая, пересекающая стороны  $AB$  и  $AC$  соответственно в точках  $K$  и  $L$  и продолжение  $BC$  в точке  $P$  ( $C$  — между  $P$  и  $B$ ). Доказать, что 
$$\frac{1}{|MK|} = \frac{1}{|ML|} + \frac{1}{|MP|}.$$

33. Через точку пересечения диагоналей четырехугольника  $ABCD$  проведена прямая, пересекающая  $AB$  в точке  $M$  и  $CD$  в точке  $N$ . Через  $M$  и  $N$  проведены прямые, соответственно параллельные  $CD$  и  $AB$  и пересекающие  $AC$  и  $BD$  в точках  $E$  и  $F$ . Доказать, что  $BE \parallel CF$ .

34. Дан четырехугольник  $ABCD$ . На прямых  $AC$  и  $BD$  взяты соответственно точки  $K$  и  $M$  так, что  $BK \parallel AD$ ,  $AM \parallel BC$ . Доказать, что  $KM \parallel CD$ .

35. Пусть  $E$  — произвольная точка на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$ . Через вершину  $B$  проведем произвольную прямую  $l$ .



Прямая, проходящая через  $E$  параллельно  $BC$  пересекает  $l$  в точке  $N$ , а прямая, параллельная  $AB$ , — в точке  $M$ . Доказать, что  $AN \parallel CM$ .

\*  
\*   \*  
\*

36. Стороны выпуклого четырехугольника разделены на  $(2n + 1)$  равных частей каждая. Соответствующие точки деления противоположных сторон соединены друг с другом. Доказать, что площадь центрального четырехугольника составляет  $1/(2n + 1)^2$  часть площади всего четырехугольника.

37. Прямая, проходящая через середины диагоналей  $AC$  и  $BC$  четырехугольника  $ABCD$ , пересекает стороны  $AB$  и  $DC$  соответственно в точках  $M$  и  $N$ . Доказать, что  $S_{DCM} = S_{ABN}$ .

38. В параллелограмме  $ABCD$  вершины  $A, B, C$  и  $D$  соединены с серединами сторон  $CD, AD, AB$  и  $BC$  соответственно. Доказать, что площадь четырехугольника, образованного этими прямыми, составляет  $1/5$  площади параллелограмма.

39. Доказать, что площадь восьмиугольника, образованного прямыми, соединяющими вершины параллелограмма с серединами противоположных сторон, равна  $1/6$  площади параллелограмма.

40. На сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  во внешнюю сторону построены два параллелограмма  $ACDE$  и  $BCFG$ . Продолжения  $DE$  и  $FD$  пересекаются в точке  $H$ . На стороне  $AB$  построен параллелограмм  $ABML$ , стороны  $AL$  и  $BM$  которого равны и параллельны  $HC$ . Доказать, что параллелограмм  $ABML$  равновелик сумме параллелограммов, построенных на  $AC$  и  $BC$ .

41. Через концы меньшего основания трапеции проведены две параллельные прямые, пересекающие большее основание. Диагонали трапеции и эти прямые разделили трапецию на семь треугольников и один пятиугольник. Доказать, что сумма площадей трех треугольников, прилежащих к боковым сторонам и меньшему основанию трапеции, равна площади пятиугольника.

42. Пусть  $ABCD$  — параллелограмм, точка  $E$  лежит на прямой  $AB$ ,  $F$  — на прямой  $AD$  ( $B$  — на отрезке  $AE$ ,  $D$  — на отрезке  $AF$ ),  $K$  — точка пересечения прямых  $ED$  и  $FB$ . Доказать, что четырехугольники  $ABKD$  и  $CEKF$  равновелики.

\*  
\*   \*  
\*

43. Рассмотрим произвольный треугольник  $ABC$ . Пусть  $A_1, B_1, C_1$  — три точки на прямых  $BC, CA, AB$  соответственно.

Введем следующие обозначения:

$$R = \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|},$$

$$R^* = \frac{\sin \angle ACC_1}{\sin \angle C_1CB} \cdot \frac{\sin \angle BAA_1}{\sin \angle A_1AC} \cdot \frac{\sin \angle CBB_1}{\sin \angle B_1BA}.$$

Доказать, что  $R = R^*$ .

**44. Теорема Чевы.** Для того чтобы прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекались в одной точке (или все три были параллельными), необходимо и достаточно, чтобы  $R = 1$  (см. задачу П.43) и при этом из трех точек  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  нечетное число (т. е. одна или все три) точек лежало на сторонах треугольника  $ABC$ , а не на продолжениях сторон.

**45. Теорема Менелая.** Для того чтобы точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы  $R = 1$  (см. задачу П.43) и при этом из трех точек  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  четное число (т. е. нуль или две) точек лежало на сторонах треугольника  $ABC$ , а не на их продолжениях.

**Примечание.** Можно вместо отношения  $\frac{|AC_1|}{|C_1B|}$  и других рассматривать отношения направленных отрезков, которое будем обозначать  $\frac{AC_1}{C_1B}$  и определять следующим образом:  $\left| \frac{AC_1}{C_1B} \right| = \frac{|AC_1|}{|C_1B|}$ ,  $\frac{AC_1}{C_1B}$  положительно, когда векторы  $\vec{AC_1}$  и  $\vec{C_1B}$  одинаково направлены, и отрицательно, если они направлены противоположно друг другу.  $\left( \frac{AC_1}{C_1B} \right.$  имеет смысл лишь для точек, расположенных на одной прямой.) Легко видеть, что отношение  $\frac{AC_1}{C_1B}$  положительно, если точка  $C_1$  лежит на отрезке  $AB$ , и отрицательно, если  $C_1$  — вне  $AB$ . Соответственно, вместо  $R$  будем рассматривать произведение отношений направленных отрезков, которое обозначим  $\tilde{R}$ . Далее введем направленные углы. Под  $\angle ACC_1$  и др. будем понимать угол, на который надо повернуть  $CA$  вокруг  $C$  против часовой стрелки до совпадения луча  $CA$  с лучом  $CC_1$ . Теперь вместо  $R^*$  будем рассматривать  $\tilde{R}^*$  — соответствующее произведение отношений синусов направленных углов.

Задачи П.43, П.44 и П.45 следует теперь переформулировать.

43\*. Доказать, что  $\tilde{R} = \tilde{R}^*$ .

44\*. Теорема Чевы. Для того чтобы прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекались в одной точке (или были параллельны) необходимо и достаточно, чтобы  $\tilde{R} = 1$ .

45\*. Теорема Менелая. Для того чтобы точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы  $\tilde{R} = -1$ .

46. Доказать, что если три прямые, проходящие через вершины треугольника, пересекаются в одной точке, то и прямые, им симметричные относительно соответствующих биссектрис треугольника, также пересекаются в одной точке или параллельны.

47. Пусть  $O$  — произвольная точка плоскости,  $M$  и  $N$  — основания перпендикуляров, опущенных из точки  $O$  на биссектрисы внутреннего и внешнего угла  $A$  треугольника  $ABC$ ;  $P$  и  $Q$  аналогично определены для угла  $B$ ;  $R$  и  $T$  — для угла  $C$ . Доказать, что прямые  $MN$ ,  $PQ$  и  $RT$  пересекаются в одной точке или параллельны.

48. Пусть  $O$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ ,  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  — точки касания этой окружности со сторонами  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  соответственно. На лучах  $OA_0$ ,  $OB_0$ ,  $OC_0$  взяты соответственно точки  $L$ ,  $M$ ,  $K$ , находящиеся на равных расстояниях от  $O$ . а) Доказать, что прямые  $AL$ ,  $BM$  и  $CK$  пересекаются в одной точке. б) Пусть  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  — проекции  $A$ ,  $B$ ,  $C$  на произвольную прямую  $l$ , проходящую через  $O$ . Доказать, что прямые  $A_1L$ ,  $B_1M$  и  $C_1K$  пересекаются в одной точке (Хирано).

49. Для того чтобы диагонали  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$  вписанного в окружность шестиугольника  $ABCDEF$  пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство  $|AB| \cdot |CD| \cdot |EF| = |BC| \cdot |DE| \cdot |FA|$ .

50. Доказать, что: а) биссектрисы внешних углов треугольника пересекают продолжения противоположных сторон треугольника в трех точках, расположенных на одной прямой; б) касательные к описанной около треугольника окружности в вершинах треугольника пересекают его противоположные стороны в трех точках, расположенных на одной прямой.

51. Окружность пересекает сторону  $AB$  треугольника  $ABC$  в точках  $C_1$  и  $C_2$ , сторону  $CA$  — в точках  $B_1$  и  $B_2$ , сторону  $BC$  — в точках  $A_1$  и  $A_2$ . Доказать, что если прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке, то и прямые  $AA_2$ ,  $BB_2$  и  $CC_2$  также пересекаются в одной точке.

52. На сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$ . Пусть  $C_2$  — точка пересечения прямых  $AB$  и  $A_1B_1$ ,  $A_2$  — точка пересечения прямых  $BC$  и  $B_1C_1$ ,  $B_2$  — точка пересечения прямых  $AC$  и  $A_1C_1$ . Доказать, что если прямые

$AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке, то точки  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$  лежат на одной прямой.

53. Прямая пересекает стороны  $AB$ ,  $BC$  и продолжение стороны  $AC$  треугольника  $ABC$  соответственно в точках  $D$ ,  $E$  и  $F$ . Доказать, что середины отрезков  $DC$ ,  $AE$  и  $BF$  лежат на одной прямой (*прямая Гаусса*).

54. Дан треугольник  $ABC$ . Определим на стороне  $BC$  точку  $A_1$  следующим образом:  $A_1$  — середина стороны  $KL$  правильного пятиугольника  $MKLN$ , у которого вершины  $K$  и  $L$  лежат на  $BC$ , а вершины  $M$  и  $N$  — соответственно на  $AB$  и  $AC$ . Аналогичным образом на сторонах  $AB$  и  $AC$  определены точки  $C_1$  и  $B_1$ . Доказать, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке.

55. Даны три попарно непересекающихся круга. Обозначим через  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  три точки пересечения общих внутренних касательных к любым двум из них, а через  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  — соответствующие точки пересечения внешних касательных. Доказать, что эти точки располагаются на четырех прямых по три на каждой ( $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_3$ ;  $A_1$ ,  $B_2$ ,  $A_3$ ;  $B_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ;  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ).

56. Доказать, что если прямые, проходящие через вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  параллельно соответственно прямым  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$  и  $A_1B_1$ , пересекаются в одной точке, то и прямые, проходящие через  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  параллельно прямым  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ , также пересекаются в одной точке (или параллельны).

57. Дан треугольник  $ABC$ ,  $M$  — произвольная точка плоскости. Биссектрисы двух углов, образованных прямыми  $AM$  и  $BM$  пересекают прямую  $AB$  в точках  $C_1$  и  $C_2$  ( $C_1$  — на отрезке  $AB$ ), точно так же на  $BC$  и  $CA$  определяются точки  $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$ . Доказать, что  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  расположены по три на четырех прямых.

58. На сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  взяты соответственно точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , а на сторонах  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$ ,  $A_1B_1$  треугольника  $A_1B_1C_1$  —  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ . Известно, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в одной точке, а также прямые  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$  пересекаются в одной точке. Доказать, что прямые  $AA_2$ ,  $BB_2$ ,  $CC_2$  пересекаются в одной точке (или параллельны).

59. Пусть  $ABCD$  — четырехугольник,  $P$  — точка пересечения  $BC$  и  $AD$ ,  $Q$  — точка пересечения  $CA$  и  $BD$ ,  $R$  — точка пересечения  $AB$  и  $CD$ . Доказать, что точки пересечения  $BC$  и  $QR$ ,  $CA$  и  $RP$ ,  $AB$  и  $PQ$  лежат на одной прямой.

60. Дан угол с вершиной  $O$ . На одной стороне угла взяты точки  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ , а на другой —  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$ . Прямые  $A_1B_1$

и  $A_2B_2$  пересекаются в точке  $N$ , а прямые  $A_3B_3$  и  $A_4B_4$  — в точке  $M$ . Доказать, что для того чтобы точки  $O$ ,  $N$  и  $M$  были на одной прямой, необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\frac{OB_1}{OB_3} \cdot \frac{OB_2}{OB_4} \cdot \frac{B_3B_4}{B_1B_2} = \frac{OA_1}{OA_3} \cdot \frac{OA_2}{OA_4} \cdot \frac{A_3A_4}{A_1A_2}.$$

(См. примечание к задачам П.43, П.44, П.45.)

**61.** Дан треугольник  $ABC$ . На сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  взяты соответственно точки:  $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$ ,  $C_1$  и  $C_2$  так, что  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке и  $AA_2$ ,  $BB_2$  и  $CC_2$  также пересекаются в одной точке. Доказать, что: а) точки пересечения прямых  $A_1B_1$  и  $AB$ ,  $B_1C_1$  и  $BC$ ,  $C_1A_1$  и  $CA$  лежат на одной прямой  $l_1$ . Точно так же точки  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$  определяют прямую  $l_2$ ; б) точка  $A$ , точка пересечения прямых  $l_1$  и  $l_2$ , а также точка пересечения прямых  $B_1C_1$  и  $B_2C_2$  лежат на одной прямой; в) точки пересечения прямых  $BC$  и  $B_2C_1$ ,  $CA$  и  $C_2A_2$ ,  $AB$  и  $A_1B_1$  лежат на одной прямой.

**62.** Произвольная прямая пересекает прямые  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  в точках  $K$ ,  $M$  и  $L$  соответственно, а прямые  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$  и  $C_1A_1$  — в точках  $K_1$ ,  $M_1$  и  $L_1$ . Доказать, что если прямые  $A_1M$ ,  $B_1L$  и  $C_1K$  пересекаются в одной точке, то и прямые  $AM_1$ ,  $BL_1$  и  $CK_1$  также пересекаются в одной точке.

**63.** Дан треугольник  $ABC$  и точка  $D$ . Точки  $E$ ,  $F$  и  $G$  находятся соответственно на прямых  $AD$ ,  $BD$  и  $CD$ ,  $K$  — точка пересечения  $AF$  и  $BE$ ,  $L$  — точка пересечения  $BG$  и  $CF$ ,  $M$  — точка пересечения  $CE$  и  $AG$ . В точках  $P$ ,  $Q$  и  $R$  пересекаются соответственно  $DK$  и  $AB$ ,  $DL$  и  $BC$ ,  $DM$  и  $AC$ . Доказать, что шесть прямых  $AL$ ,  $EQ$ ,  $BM$ ,  $FR$ ,  $CK$  и  $GP$  пересекаются в одной точке.

**64.** Точки  $A$  и  $A_1$ ,  $B$  и  $B_1$ ,  $C$  и  $C_1$  симметричны относительно прямой  $l$ ,  $N$  — произвольная точка на  $l$ . Доказать, что прямые  $AN$ ,  $BN$ ,  $CN$  пересекают соответственно прямые  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$ ,  $A_1B_1$  в трех точках, расположенных на одной прямой.

**65.** Пусть  $A_1$ ,  $A_3$ ,  $A_5$  — три точки на одной прямой,  $A_2$ ,  $A_4$ ,  $A_6$  — на другой. Доказать, что три точки, в которых попарно пересекаются прямые  $A_1A_2$  и  $A_4A_5$ ,  $A_2A_3$  и  $A_5A_6$ ,  $A_3A_4$  и  $A_6A_1$  лежат на одной прямой (П а п п).

### § 3. Геометрические места точек

**66.** Через точку пересечения двух окружностей проведена прямая, вторично пересекающая окружности в двух точках  $A$  и  $B$ . Найти геометрическое место середин отрезков  $AB$ .

67. Даны точка  $A$  и прямая  $l$ ,  $B$  — произвольная точка  $l$ . Найти геометрическое место точек  $M$  таких, что  $ABM$  — правильный треугольник.

68. Дан правильный треугольник  $ABC$ . На продолжении его сторон  $AB$  и  $AC$  за точки  $B$  и  $C$  взяты точки  $D$  и  $E$  так, что  $|BD| \cdot |CE| = |BC|^2$ . Найти геометрическое место точек пересечения прямых  $DC$  и  $BE$ .

69. Даны три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  на прямой,  $D$  — произвольная точка плоскости, не лежащая на этой прямой. Проведем через  $C$  прямые, параллельные  $AD$  и  $BD$ , до пересечения с прямыми  $BD$  и  $AD$  в точках  $P$  и  $Q$ . Найти геометрическое место оснований  $M$  перпендикуляров, опущенных из  $C$  на  $PQ$ , а также найти все точки  $D$ , для которых  $M$  — фиксированная точка.

70. На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  взята точка  $K$ , а на медиане  $BD$  — точка  $P$  так, что площадь треугольника  $APK$  равна площади треугольника  $BPC$ . Найти геометрическое место точек пересечения прямых  $AP$  и  $BK$ .

71. Через данную точку  $O$  внутри данного угла проходят два луча, образующие данный угол  $\alpha$ . Пусть один луч пересекает одну сторону угла в точке  $A$ , а другой луч — другую сторону угла в точке  $B$ . Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из  $O$  на прямую  $AB$ .

72. В окружности проведены два взаимно перпендикулярных диаметра  $AC$  и  $BD$ . Пусть  $P$  — произвольная точка окружности,  $PA$  пересекает  $BD$  в точке  $E$ . Прямая, проходящая через  $E$  параллельно  $AC$  пересекается с прямой  $PB$  в точке  $M$ . Найти геометрическое место точек  $M$ .

73. Дан угол, вершина которого — в точке  $A$ , и точка  $B$ . Произвольная окружность, проходящая через  $A$  и  $B$  пересекает стороны угла в точках  $C$  и  $D$  (отличных от  $A$ ). Найти геометрическое место центров тяжести треугольников  $ACD$ .

74. Одна вершина прямоугольника находится в данной точке, две другие, не принадлежащие одной стороне, — на двух заданных взаимно перпендикулярных прямых. Найти геометрическое место четвертых вершин таких прямоугольников.

75. Пусть  $A$  — одна из двух точек пересечения двух данных окружностей; через другую точку пересечения проведена произвольная прямая, пересекающая одну окружность в точке  $B$ , а другую — в точке  $C$ , отличных от общих точек этих окружностей. Найти геометрическое место: а) центров окружностей, описанных около  $ABC$ ; б) центров тяжести треугольника  $ABC$ ; в) точек пересечения высот треугольника  $ABC$ .

76. Пусть  $B$  и  $C$  — две фиксированные точки данной окружности,  $A$  — переменная точка этой же окружности. Найти гео-

метрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из середины  $AB$  на  $AC$ .

77. Найти геометрическое место точек пересечения диагоналей прямоугольников, стороны которых (или их продолжения) проходят через четыре данные точки плоскости.

78. Даны два круга, касающиеся друг друга изнутри в точке  $A$ . Касательная к меньшему кругу пересекает большую окружность в точках  $B$  и  $C$ . Найти геометрическое место центров окружностей, вписанных в треугольники  $ABC$ .

79. Даны две пересекающиеся окружности. Найти геометрическое место центров прямоугольников с вершинами на этих окружностях.

80. Внутри круглого бильярда в точке  $A$ , отличной от центра, лежит упругий шарик, размерами которого можно пренебречь. Указать геометрическое место точек  $A$ , из которых можно так направить этот шарик, чтобы он, минуя центр бильярда, после трех отражений от границы попал в точку  $A$ .

81. Через точку, лежащую на равном расстоянии от двух данных параллельных прямых, проведена прямая, пересекающая эти прямые в точках  $M$  и  $N$ . Найти геометрическое место вершин  $P$  равносторонних треугольников  $MNP$ .

82. Даны две точки  $A$  и  $B$  и прямая  $l$ . Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через  $A$  и  $B$  и пересекающих прямую  $l$ .

83. Даны две точки  $O$  и  $M$ . Определить: а) геометрическое место точек плоскости, которые могут служить одной из вершин треугольника с центром описанного круга в точке  $O$  и центром тяжести в точке  $M$ ; б) геометрическое место точек плоскости, которые могут служить одной из вершин тупоугольного треугольника с центром описанного круга в точке  $O$  и центром тяжести в точке  $M$ .

84. В окружность вписан правильный треугольник. Найти геометрическое место точек пересечения высот всевозможных треугольников, вписанных в эту же окружность, две стороны которых параллельны двум сторонам данного правильного треугольника.

85. Найти геометрическое место центров всевозможных прямоугольников, описанных около данного треугольника. (Прямоугольник будем называть *описанным*, если одна вершина треугольника совпадает с вершиной прямоугольника, а две другие лежат на двух, не содержащих этой вершины, сторонах прямоугольника.)

86. Даны два квадрата с соответственно параллельными сторонами. Определить геометрическое место точек  $M$  таких, что для любой точки  $P$  из первого квадрата найдется точка

$Q$  из второго такая, что треугольник  $MPQ$  — правильный. Пусть стороны первого квадрата равны  $a$ , второго —  $b$ . При каком соотношении между  $a$  и  $b$  искомое геометрическое место точек не пусто?

87. Внутри данного треугольника найти геометрическое место точек  $M$ , для каждой из которых для любой точки  $N$ , лежащей на границе треугольника, можно найти такую точку  $P$  внутри или на его границе, что площадь треугольника  $MNP$  не меньше  $1/6$  площади данного треугольника.

88. Даны две точки  $A$  и  $I$ . Найти геометрическое место точек  $B$  таких, что существует треугольник  $ABC$  с центром вписанного круга в точке  $I$ , все углы которого меньше  $\alpha$  ( $60^\circ < \alpha < 90^\circ$ ).

89. Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  расположены на одной прямой ( $B$  — между  $A$  и  $C$ ). Найти геометрическое место точек  $M$  таких, что  $\operatorname{ctg} \angle AMB + \operatorname{ctg} \angle BMC = k$ .

90. Даны две точки  $A$  и  $Q$ . Найти геометрическое место точек  $B$  таких, что существует остроугольный треугольник  $ABC$ , для которого  $Q$  — центр тяжести.

91. Даны две точки  $A$  и  $H$ . Найти геометрическое место точек  $B$  таких, что существует треугольник  $ABC$ , для которого  $H$  — точка пересечения высот и все углы которого больше  $\alpha$  ( $\alpha < \pi/4$ ).

92. На плоскости даны два луча. Найти геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от этих лучей. (Расстояние от точки до луча равно расстоянию от этой точки до ближайшей к ней точки луча.)

93. Дан угол и окружность с центром в точке  $O$ , вписанная в этот угол. Произвольная прямая касается окружности и пересекает стороны угла в точках  $M$  и  $N$ . Найти геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольников  $MON$ .

94. Даны две окружности, на них взяты по одной точке  $A$  и  $B$ , равноудаленных от середины отрезка, соединяющего их центры. Найти геометрическое место середин отрезков  $AB$ .

95. Дан отрезок  $AB$ . Возьмем на  $AB$  произвольную точку  $M$  и рассмотрим два квадрата  $AMCD$  и  $MBEF$ , расположенные по одну сторону от  $AB$ . Опишем около этих квадратов окружности и обозначим через  $N$  их точку пересечения, отличную от  $M$ . Доказать, что: а)  $AF$  и  $BC$  пересекаются в  $N$ ; б)  $MN$  проходит через фиксированную точку плоскости. Найти геометрическое место середин отрезков, соединяющих центры квадратов.

96. Дана окружность и точка  $A$ . Пусть  $M$  — произвольная точка окружности. Найти геометрическое место точек пересече-



ния срединного перпендикуляра к отрезку  $AM$  и касательной к окружности, проходящей через  $M$ .

97. Две окружности касаются друг друга в точке  $A$ . Одна прямая, проходящая через  $A$ , пересекает вторично эти окружности в точках  $B$  и  $C$ , другая — в точках  $B_1$  и  $C_1$  ( $B$  и  $B_1$  — на одной окружности). Найти геометрическое место точек пересечения окружностей, описанных около треугольников  $AB_1C$  и  $ABC_1$ .

98. Найти геометрическое место вершин прямых углов всевозможных равнобедренных прямоугольных треугольников, концы гипотенуз которых лежат на двух заданных окружностях.

99. Стороны данного треугольника являются диагоналями трех параллелограммов. Стороны этих параллелограммов параллельны двум прямым —  $l$  и  $p$ . Доказать, что три диагонали этих параллелограммов, отличные от сторон треугольника, пересекаются в одной точке  $M$ . Найти геометрическое место точек  $M$ , если  $l$  и  $p$  — две произвольные взаимно перпендикулярные прямые.

100. Пусть  $B$  и  $C$  — две фиксированные точки окружности,  $A$  — произвольная точка этой окружности;  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ ,  $M$  — проекция  $H$  на биссектрису угла  $BAC$ . Найти геометрическое место точек  $M$ .

101. Дан треугольник  $ABC$ . Пусть  $D$  — произвольная точка на прямой  $BC$ . Прямые, проходящие через  $D$  параллельно  $AB$  и  $AC$ , пересекают  $AC$  и  $AB$  в точках  $E$  и  $F$ . Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через точки  $D$ ,  $E$  и  $F$ .

102. Дан  $ABC$  — правильный треугольник. Найти геометрическое место точек  $M$  внутри этого треугольника таких, что  $\angle MAB + \angle MBC + \angle MCA = \pi/2$ .

103. Внутри треугольника взята точка  $M$  такая, что существует прямая  $l$ , проходящая через  $M$  и разбивающая данный треугольник на две части таким образом, что при симметрии относительно  $l$  одна часть оказывается внутри или на границе другой. Найти геометрическое место точек  $M$ .

#### § 4. Треугольник. Треугольник и окружность

104. Из вершины  $A$  треугольника  $ABC$  опущены перпендикуляры  $AM$  и  $AN$  на биссектрисы внешних углов треугольника ( $B$  и  $C$ ). Доказать, что отрезок  $MN$  равен полупериметру треугольника  $ABC$ .

105. В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BD$ ,  $AN$  — перпендикуляр к  $AB$ ,  $CM$  — перпендикуляр к  $BC$ , причем  $|AN| =$

$= |DC|$ ,  $|CM| = |AD|$ . Доказать, что  $M$  и  $N$  равноудалены от вершины  $B$ .

106. Доказать, что для любого прямоугольного треугольника радиус окружности, касающейся его катетов и описанной окружности (изнутри), равен диаметру вписанной окружности.

107. Доказать, что если одна сторона треугольника лежит на фиксированной прямой плоскости, а точка пересечения высот совпадает с фиксированной точкой, то окружность, описанная около этого треугольника, также проходит через фиксированную точку.

108. Дан треугольник  $ABC$ ; пусть  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — точки окружности, описанной около  $ABC$ , диаметрально противоположные вершинам  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Проведем через  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  прямые, параллельные  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . Доказать, что треугольник, образованный этими прямыми, гомотетичен треугольнику  $ABC$  с коэффициентом 2 и центром в точке пересечения высот треугольника  $ABC$ .

109. Доказать, что проекции основания высоты треугольника на стороны, ее заключающие, и на две другие высоты, лежат на одной прямой.

110. На продолжении стороны  $AB$  треугольника  $ABC$  за точку  $B$  взята точка  $D$  так, что  $|BD| = |CB|$ . Точно так же на продолжении стороны  $CB$  за точку  $B$  взята точка  $F$  так, что  $|BF| = |AB|$ . Доказать, что точки  $A$ ,  $C$ ,  $D$  и  $F$  лежат на одной окружности, центр которой находится на окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .

111. Три равные окружности проходят через точку  $H$ . Доказать, что  $H$  является точкой пересечения высот треугольника, вершины которого совпадают с тремя другими точками попарного пересечения окружностей.

112. Пусть  $P$  — произвольная точка окружности, описанной около прямоугольника. Две прямые, проходящие через  $P$  параллельно сторонам прямоугольника, пересекают стороны прямоугольника или их продолжения в точках  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$ . Доказать, что  $N$  — точка пересечения высот треугольника  $KLM$ . Доказать также, что основания высот треугольника  $KLM$ , отличные от  $P$ , лежат на диагоналях прямоугольника.

113. В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$ . Прямая, перпендикулярная  $AD$  и проходящая через середину  $AD$ , пересекает  $AC$  в точке  $P$ . Прямая, перпендикулярная  $BE$  и проходящая через середину  $BE$ , пересекает  $AB$  в точке  $Q$ . Наконец, прямая, перпендикулярная  $CF$  и проходящая через середину  $CF$ , пересекает  $CB$  в точке  $R$ . Доказать, что треугольники  $DEF$  и  $PQR$  равновелики.

114. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $|AB| = |BC|$ ),  $D$  — середина  $AC$ ,  $E$  — проекция  $D$  на  $BC$ ,  $F$  — середина  $DE$ . Доказать, что прямые  $BF$  и  $AE$  перпендикулярны.

115. Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается сторон  $AB$  и  $AC$  в точках  $C_1$  и  $B_1$ , а окружность, касающаяся стороны  $BC$  и продолжений  $AB$  и  $AC$ , касается прямых  $AB$  и  $AC$  в точках  $C_2$  и  $B_2$ . Пусть  $D$  — середина  $BC$ . Прямая  $AD$  пересекается с прямыми  $B_1C_1$  и  $B_2C_2$  в точках  $E$  и  $F$ . Доказать, что  $BECF$  — параллелограмм.

116. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса внутреннего угла  $A$ . Построим касательную  $l$  к описанному кругу в точке  $A$ . Доказать, что прямая, проведенная через  $D$  параллельно  $l$ , касается вписанной окружности треугольника  $ABC$ .

117. В треугольнике  $ABC$  проведена прямая, пересекающая стороны  $AC$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$  так, что  $|MN| = |AM| + |BN|$ . Доказать, что все такие прямые касаются одной и той же окружности.

118. Доказать, что точки, симметричные центру описанного около треугольника круга относительно середин его медиан, лежат на высотах треугольника.

119. Доказать, что если высота треугольника в  $\sqrt{2}$  раз больше радиуса описанного круга, то прямая, соединяющая основания перпендикуляров, опущенных из основания этой высоты на стороны, ее заключающие, проходит через центр описанного круга.

120. Пусть  $ABC$  — прямоугольный треугольник ( $\angle C = 90^\circ$ ),  $CD$  — высота,  $K$  — точка плоскости, причем  $|AK| = |AC|$ . Доказать, что диаметр окружности, описанной около треугольника  $ABK$ , проходящий через вершину  $A$ , перпендикулярен прямой  $DK$ .

121. Через вершину  $A$  треугольника  $ABC$  проведена прямая параллельно  $BC$ ; на этой прямой взята точка  $D$  так, что  $|AD| = |AC| + |AB|$ ; отрезок  $DB$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $E$ . Доказать, что прямая, проведенная через  $E$  параллельно  $BC$ , проходит через центр вписанной в треугольник  $ABC$  окружности.

122. Две окружности проходят через вершину угла и точку, лежащую на биссектрисе. Доказать, что отрезки сторон угла, заключенные между окружностями, равны.

123. Дан треугольник  $ABC$  и точка  $D$ . Прямые  $AD$ ,  $BD$  и  $CD$  вторично пересекаются с окружностью, описанной около треугольника  $ABC$ , в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  соответственно. Рассмотрим две окружности: первая проходит через  $A$  и  $A_1$ , вторая — через  $B$  и  $B_1$ . Доказать, что концы общей хорды этих двух окружностей и точки  $C$  и  $C_1$  лежат на одной окружности.

124. Через вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  проведены три параллельные прямые  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$ . Доказать, что прямые, симметричные  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$  соответственно относительно биссектрис углов  $A$ ,  $B$  и  $C$ , пересекаются в одной точке, расположенной на окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .

125. Доказать, что если  $M$  — точка внутри треугольника  $ABC$  и прямые  $AM$ ,  $BM$  и  $CM$  проходят соответственно через центры окружностей, описанных около треугольников  $BMC$ ,  $CMA$  и  $AMB$ , то  $M$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

126. На сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  соответственно. Пусть  $M$  — произвольная точка плоскости. Прямая  $BM$  вторично пересекает окружность, проходящую через  $A_1$ ,  $B$  и  $C_1$  в точке  $B_2$ , прямая  $CM$  пересекает окружность, проходящую через  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C$ , в точке  $C_2$ , а прямая  $AM$  — окружность, проходящую через  $A$ ,  $B_1$  и  $C_1$ , в точке  $A_2$ . Доказать, что точки  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  и  $M$  лежат на одной окружности.

127. Пусть  $A_1$  — точка, симметричная точке касания окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , со стороной  $BC$ , относительно биссектрисы угла  $A$ . Аналогично определяются точки  $B_1$  и  $C_1$ . Доказать, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  и прямая, проходящая через центры вписанной и описанной окружности треугольника  $ABC$ , пересекаются в одной точке.

128. Пусть  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  — высоты треугольника  $ABC$ . Прямая, перпендикулярная  $AB$ , пересекает  $AC$  и  $A_1C_1$  в точках  $K$  и  $L$ . Доказать, что центр окружности, описанной около треугольника  $KLB_1$ , лежит на прямой  $BC$ .

129. Четыре равные окружности проходят через одну точку  $A$ . Доказать, что три отрезка, концы каждого из которых отличны от  $A$  и являются точками пересечения двух окружностей (противоположные концы каждого отрезка не принадлежат одной окружности), пересекаются в одной точке.

130. Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ ; угол  $C$  — прямой,  $O$  — центр вписанной окружности,  $M$  — точка касания вписанной окружности с гипотенузой, окружность с центром в  $M$ , проходящая через  $O$ , пересекается с биссектрисами углов  $A$  и  $B$  в точках  $K$  и  $L$ , отличных от  $O$ . Доказать, что  $K$  и  $L$  — центры окружностей, вписанных в треугольники  $ACD$  и  $BCD$ , где  $CD$  — высота треугольника  $ABC$ .

131. Доказать, что в треугольнике  $ABC$  биссектриса угла  $A$ , средняя линия, параллельная  $AC$ , и прямая, соединяющая точки касания вписанной окружности со сторонами  $CB$  и  $CA$ , пересекаются в одной точке.

**132.** Доказать, что три прямые, проходящие соответственно через основания двух высот треугольника, концы двух его биссектрис и через две точки касания вписанной окружности с его сторонами (все точки расположены на двух сторонах треугольника), пересекаются в одной точке.

**133.** На сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  так, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке. Доказать, что если  $AA_1$  является биссектрисой угла  $B_1A_1C_1$ , то  $AA_1$  — высота треугольника  $ABC$ .

**134.** На сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  взяты соответственно точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  так, что  $\angle AA_1C = \angle BB_1A = \angle CC_1B$  (углы измеряются в одном направлении). Доказать, что центр окружности, описанной около треугольника, ограниченного прямыми  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ , совпадает с точкой пересечения высот треугольника  $ABC$ .

**135.** Вершины треугольника  $A_1B_1C_1$  расположены на прямых  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  ( $A_1$  — на  $BC$ ,  $B_1$  — на  $CA$ ,  $C_1$  — на  $AB$ ). Доказать, что если треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  подобны (сходственными являются вершины  $A$  и  $A_1$ ,  $B$  и  $B_1$ ,  $C$  и  $C_1$ ), то точка пересечения высот треугольника  $A_1B_1C_1$  является центром описанной около треугольника  $ABC$  окружности. Верно ли обратное утверждение?

**136.** На каждой стороне треугольника взято по две точки таким образом, что все шесть отрезков, соединяющих каждую точку с противоположной вершиной, равны между собой. Доказать, что середины этих шести отрезков лежат на одной окружности.

**137.** В треугольнике  $ABC$  на лучах  $AB$  и  $CB$  отложены отрезки  $|AM| = |CN| = p$ , где  $p$  — полупериметр треугольника ( $B$  лежит между  $A$  и  $M$  между  $C$  и  $N$ ). Пусть  $K$  — точка описанной около  $ABC$  окружности, диаметрально противоположная  $B$ . Доказать, что перпендикуляр, опущенный из  $K$  на  $MN$ , проходит через центр вписанной окружности.

**138.** Из некоторой точки окружности, описанной около равностороннего треугольника  $ABC$ , проведены прямые, параллельные  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  пересекающие  $CA$ ,  $AB$  и  $BC$  в точках  $M$ ,  $N$  и  $Q$  соответственно. Доказать, что  $M$ ,  $N$  и  $Q$  лежат на одной прямой.

**139.** Доказать, что три прямые, симметричные произвольной прямой, проходящей через точку пересечения высот треугольника, относительно сторон треугольника, пересекаются в одной точке.

**140.** Теорема Лейбница. Пусть  $M$  — произвольная точка плоскости,  $G$  — центр тяжести треугольника  $ABC$ . Тогда

выполняется равенство  $3|MG|^2 = |MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 - \frac{1}{3}(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2)$ .

141. Пусть  $ABC$  — правильный треугольник со стороной  $a$ ,  $M$  — некоторая точка плоскости, находящаяся на расстоянии  $d$  от центра треугольника  $ABC$ . Доказать, что площадь треугольника, стороны которого равны отрезкам  $MA$ ,  $MB$  и  $MC$ , выражается формулой  $S = \frac{\sqrt{3}}{12} |a^2 - 3d^2|$ .

142. Даны два правильных треугольника:  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ . Найти геометрическое место таких точек  $M$ , что два треугольника, составленных из отрезков  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$  и  $MA_1$ ,  $MB_1$ ,  $MC_1$  соответственно, равновелики.

143. Дан треугольник  $ABC$ . На лучах  $AB$  и  $CB$  откладываются отрезки  $AK$  и  $CM$ , равные  $AC$ . Доказать, что радиус окружности, описанной около треугольника  $BKM$ , равен расстоянию между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника  $ABC$ , а прямая  $KM$  перпендикулярна прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей.

144. Через вершину треугольника проведена прямая, перпендикулярная прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей. Доказать, что эта прямая со сторонами данного треугольника образует два треугольника, для которых разность радиусов описанных окружностей равна расстоянию между центрами вписанной и описанной окружностей исходного треугольника.

145. Доказать, что если длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию, то: а) радиус вписанного круга равен  $1/3$  высоты, опущенной на среднюю сторону; б) прямая, соединяющая центр тяжести треугольника с центром вписанного круга, параллельна средней стороне; в) биссектриса внутреннего угла, противолежащего средней стороне, перпендикулярна прямой, соединяющей центры вписанного и описанного кругов; г) для всех точек этой биссектрисы сумма расстояний до сторон треугольника постоянна; д) центр вписанной окружности, середины наибольшей и наименьшей сторон и вершина угла, ими образованного, лежат на одной окружности.

146. Пусть  $K$  — середина стороны  $BC$  треугольника  $ABC$ ,  $M$  — основание высоты, опущенной на  $BC$ . Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается стороны  $BC$  в точке  $D$ ; окружность внеписанная, касающаяся продолжений  $AB$  и  $AC$  и стороны  $BC$ , касается  $BC$  в точке  $E$ . Общая касательная к этим окружностям, отличная от сторон треугольника, пере-

секает окружность, проходящую через  $K$  и  $M$ , в точках  $F$  и  $G$ . Доказать, что точки  $D$ ,  $E$ ,  $F$  и  $G$  лежат на одной окружности.

\*  
\*   \*  
\*

**147.** Доказать, что центр тяжести треугольника, точка пересечения высот и центр описанного круга лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*).

**148.** Какие стороны пересекает прямая Эйлера в остроугольном и тупоугольном треугольнике?

**149.** Пусть  $K$  — точка, симметричная центру описанной около  $\triangle ABC$  окружности относительно стороны  $BC$ . Доказать, что прямая Эйлера треугольника  $ABC$  делит отрезок  $AK$  пополам.

**150.** Доказать, что на прямой Эйлера треугольника  $ABC$  существует такая точка  $P$ , что расстояния от центров тяжести треугольников  $ABP$ ,  $BSP$ ,  $CAP$  соответственно до вершин  $C$ ,  $A$  и  $B$  равны между собой.

**151.** Пусть  $P$  — такая точка внутри треугольника  $ABC$ , что углы  $APB$ ,  $BPC$  и  $CPA$  равны  $120^\circ$  (предполагаем, что углы треугольника  $ABC$  меньше  $120^\circ$ ). Доказать, что прямые Эйлера треугольников  $APB$ ,  $BPC$  и  $CPA$  пересекаются в одной точке.

**Примечание.** При решении этой задачи используется результат задачи II. 296.

**152.** Доказать, что прямая, соединяющая центры вписанной и описанной окружностей данного треугольника, является прямой Эйлера треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами данного треугольника.

\*  
\*   \*  
\*

**153.** Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки окружности, описанной около треугольника, на стороны треугольника, лежат на одной прямой (*прямая Симсона*).

**154.** Доказать, что угол между прямыми Симсона, соответствующими двум точкам окружности, измеряется половиной дуги между этими точками.

**155.** Пусть  $M$  — точка окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Прямая, проходящая через  $M$  перпендикулярно  $BC$ , вторично пересекает окружность в точке  $N$ . Доказать, что прямая Симсона, соответствующая точке  $M$ , параллельна прямой  $AN$ .

156. Доказать, что проекция стороны  $AB$  треугольника  $ABC$  на прямую Симсона, соответствующую точке  $M$ , равна расстоянию между проекциями точки  $M$  на стороны  $AC$  и  $BC$ .

157. Пусть  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  — высоты треугольника  $ABC$ . Прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  вторично пересекают окружность, описанную около треугольника  $ABC$ , в точках  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  соответственно. Прямые Симсона, соответствующие точкам  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ , образуют треугольник  $A_3B_3C_3$  ( $A_3$  — точка пересечения прямых Симсона, соответствующих точкам  $B_2$  и  $C_2$  и т. д.). Доказать, что центры тяжести треугольников  $A_1B_1C_1$  и  $A_3B_3C_3$  совпадают, а прямые  $A_2A_3$ ,  $B_2B_3$  и  $C_2C_3$  пересекаются в одной точке.

158. Пусть  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — точки на окружности, описанной около треугольника  $ABC$  такие, что  $\cup AA_1 + \cup BB_1 + \cup CC_1 = 2k\pi$  (все дуги измеряются в одном направлении,  $k$  — целое число). Доказать, что прямые Симсона точек  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  относительно треугольника  $ABC$  пересекаются в одной точке.

159. Доказать, что касательная к параболе в ее вершине является прямой Симсона треугольника, образованного при пересечении любых трех других касательных к той же параболе (Ш ю л л е р).

\*  
\*   \*   \*

160. Доказать, что середины сторон треугольника, основания высот и середины отрезков высот от вершин до точки их пересечения лежат на одной окружности — «окружности девяти точек» (Э й л е р).

161. Пусть  $H$  — точка пересечения высот треугольника,  $D$  — середина какой-либо стороны,  $K$  — одна из точек пересечения прямой  $HD$  с описанной окружностью ( $D$  — между  $H$  и  $K$ ). Доказать, что  $D$  — середина отрезка  $HK$ .

162. Пусть  $M$  — точка пересечения медиан треугольника,  $E$  — основание какой-либо высоты,  $F$  — одна из точек пересечения прямой  $ME$  с описанной окружностью ( $M$  — между  $E$  и  $F$ ). Доказать, что  $|FM| = 2|EM|$ .

163. Высота, опущенная на сторону  $BC$  треугольника  $ABC$ , пересекает описанную окружность в точке  $A_1$ . Доказать, что расстояние от центра окружности девяти точек до стороны  $BC$

равно  $\frac{1}{4} |AA_1|$ .

164. В треугольнике  $ABC$   $AA_1$  — высота,  $H$  — точка пересечения высот. Пусть  $P$  — произвольная точка окружности, опи-



санной около треугольника  $ABC$ ,  $M$  — точка на прямой  $HP$  такая, что  $|HP| \cdot |HM| = |HA_1| \cdot |HA|$  ( $H$  — на отрезке  $MP$ , если треугольник  $ABC$  — остроугольный и вне его, если он — тупоугольный). Доказать, что  $M$  лежит на окружности девяти точек треугольника  $ABC$ .

165. В треугольнике  $ABC$   $BK$  — высота,  $BL$  — медиана,  $M$  и  $N$  — проекции точек  $A$  и  $C$  на биссектрису угла  $B$ . Доказать, что точки  $K, L, M$  и  $N$  лежат на одной окружности, центр которой находится на окружности девяти точек треугольника  $ABC$ .

166. Пусть  $H$  — точка пересечения высот треугольника,  $F$  — произвольная точка описанной окружности. Доказать, что прямая Симсона, соответствующая точке  $F$ , проходит через одну из точек пересечения прямой  $FH$  с окружностью девяти точек (см. задачи II. 153, II. 159).

167. Пусть  $l$  — произвольная прямая, проходящая через центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ ,  $A_1, B_1$  и  $C_1$  — проекции  $A, B$  и  $C$  на  $l$ . Проведем через  $A_1$  прямую, перпендикулярную  $BC$ , через  $B_1$  — перпендикулярную  $AC$ , через  $C_1$  — перпендикулярную  $AB$ . Доказать, что эти три прямые пересекаются в одной точке, расположенной на окружности девяти точек треугольника  $ABC$ .

168. Дан треугольник  $ABC$ ;  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  — его высоты. Доказать, что прямые Эйлера треугольников  $AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C$  пересекаются в такой точке  $P$  окружности девяти точек, для которой один из отрезков  $PA, PB, PC$  равен сумме двух других отрезков (Виктор Тебо).

169. Доказать, что три окружности, каждая из которых проходит через вершину треугольника, основание высоты, опущенной из этой вершины, и касается радиуса описанного около треугольника круга, проведенного в эту вершину, пересекаются в двух точках, расположенных на прямой Эйлера данного треугольника.

170. Рассмотрим три окружности, каждая из которых проходит через одну вершину треугольника и основания двух биссектрис — внутренней и внешней, выходящих из этой вершины (эти окружности носят название *окружностей Аполлония*). Доказать, что: а) эти три окружности пересекаются в двух точках ( $M_1$  и  $M_2$ ); б) прямая  $M_1M_2$  проходит через центр круга, описанного около данного треугольника; в) основания перпендикуляров, опущенных из точек  $M_1$  и  $M_2$  на стороны треугольника, служат вершинами двух правильных треугольников.

171. Прямая, симметричная медиане треугольника относительно биссектрисы того же угла, называется *симедианой*. Пусть симедиана, выходящая из вершины  $B$  треугольника  $ABC$ ,

пересекает  $AC$  в точке  $K$ . Доказать, что  $|AK|:|KC| = |AB|^2:|BC|^2$ .

172. Пусть  $D$  — произвольная точка на стороне  $BC$ ,  $E$  и  $F$  — точки на  $AC$  и  $AB$  такие, что  $DE$  параллельна  $AB$ , а  $DF$  параллельна  $AC$ . Окружность, проходящая через  $D$ ,  $E$  и  $F$ , вторично пересекает  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  в точках  $D_1$ ,  $E_1$  и  $F_1$  соответственно. Пусть  $M$  и  $N$  — точки пересечения  $DE$  и  $F_1D_1$ ,  $DF$  и  $D_1E_1$ . Доказать, что  $M$  и  $N$  лежат на симедиане, выходящей из вершины  $A$ . При этом, если  $D$  совпадает с основанием симедианы, то окружность, проходящая через  $D$ ,  $E$  и  $F$ , касается стороны  $BC$ . (Эта окружность называется *окружностью Туккера*.)

173. Доказать, что общие хорды описанной около данного треугольника окружности и окружностей Аполлония являются симедианами этого треугольника (см. задачи II. 170, II. 171).

\*  
\*   \*

174. Дана трапеция —  $ABCD$ , в которой боковая сторона  $CD$  перпендикулярна основаниям  $AD$  и  $BC$ . Окружность с диаметром  $AB$  пересекает  $AD$  в точке  $P$  ( $P$  отлична от  $A$ ). Касательная к окружности в точке  $P$  пересекает  $CD$  в точке  $M$ . Из  $M$  к окружности проведена вторая касательная, касающаяся ее в точке  $Q$ . Доказать, что прямая  $BQ$  делит  $CD$  пополам.

175. Пусть  $M$  и  $N$  — проекции точки пересечения высот треугольника  $ABC$  на биссектрисы внутреннего и внешнего угла  $B$ . Доказать, что прямая  $MN$  делит сторону  $AC$  пополам.

176. Дана окружность и две точки  $A$  и  $B$  на ней. Касательные к окружности, проходящие через  $A$  и  $B$ , пересекаются в точке  $C$ . Окружность, проходящая через  $C$ , касается прямой  $AB$  в точке  $V$  и вторично пересекается с данной в точке  $M$ . Доказать, что прямая  $AM$  делит отрезок  $CB$  пополам.

177. Из точки  $A$ , расположенной вне окружности, проведены к ней две касательные  $AM$  и  $AN$  ( $M$  и  $N$  — точки касания) и секущая, пересекающая окружность в точках  $K$  и  $L$ . Проведем произвольную прямую  $l$ , параллельную  $AM$ . Пусть  $KM$  и  $LM$  пересекают  $l$  в точках  $P$  и  $Q$ . Доказать, что прямая  $MN$  делит отрезок  $PQ$  пополам.

178. Диаметр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , проходящий через точку касания со стороной  $BC$ , пересекает хорду, соединяющую две другие точки касания, в точке  $N$ . Доказать, что  $AN$  делит  $BC$  пополам.

179. В треугольник  $ABC$  вписана окружность. Пусть  $M$  — точка касания окружности со стороной  $AC$ ,  $MK$  — диа-

метр. Прямая  $BK$  пересекает  $AC$  в точке  $N$ . Доказать, что  $|AM| = |NC|$ .

180. В треугольник  $ABC$  вписана окружность,  $M$  — точка касания окружности со стороной  $BC$ ,  $MK$  — диаметр. Прямая  $AK$  пересекает окружность в точке  $P$ . Доказать, что касательная к окружности в точке  $P$  делит сторону  $BC$  пополам.

181. Прямая  $l$  касается окружности в точке  $A$ , пусть  $CD$  — хорда окружности, параллельная  $l$ ,  $B$  — произвольная точка прямой  $l$ . Прямые  $CB$  и  $DB$  вторично пересекают окружность в точках  $L$  и  $K$ . Доказать, что прямая  $LK$  делит отрезок  $AB$  пополам.

182. Даны две пересекающиеся окружности. Пусть  $A$  — одна из точек их пересечения. Из произвольной точки, лежащей на продолжении общей хорды данных окружностей, проведены к одной из них две касательные, касающиеся ее в точках  $M$  и  $N$ . Пусть  $P$  и  $Q$  — точки пересечения (отличные от  $A$ ) соответственно прямых  $MA$  и  $NA$  со второй окружностью. Доказать, что прямая  $MN$  делит отрезок  $PQ$  пополам.

183. На высоте  $BD$  треугольника  $ABC$  как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны  $AB$  и  $BC$  соответственно в точках  $K$  и  $L$ . Прямые, касающиеся окружности в точках  $K$  и  $L$ , пересекаются в точке  $M$ . Доказать, что прямая  $BM$  делит сторону  $AC$  пополам.

184. Прямая  $l$  перпендикулярна отрезку  $AB$  и проходит через  $B$ . Окружность с центром на  $l$  проходит через  $A$  и пересекает  $l$  в точках  $C$  и  $D$ , касательные к окружности в точках  $A$  и  $C$  пересекаются в  $N$ . Доказать, что прямая  $DN$  делит отрезок  $AB$  пополам.

185. Около треугольника  $ABC$  описана окружность. Пусть  $N$  — точка пересечения касательных к окружности, проходящих через точки  $B$  и  $C$ ,  $M$  — такая точка окружности, что  $AM \parallel BC$ ,  $K$  — точка пересечения  $MN$  и окружности. Доказать, что  $KA$  делит  $BC$  пополам.

186. Пусть  $A$  — проекция центра данной окружности на прямую  $l$ . На этой прямой взяты еще две точки  $B$  и  $C$  так, что  $|AB| = |AC|$ . Через  $B$  и  $C$  проведены две произвольные секущие, пересекающие окружность в точках  $P, Q$  и  $M, N$  соответственно. Пусть прямые  $NP$  и  $MQ$  пересекают прямую  $l$  в точках  $R$  и  $S$ . Доказать, что  $|RA| = |AS|$ .

187. Дан треугольник  $ABC$ ;  $A_1, B_1, C_1$  — середины сторон  $BC, CA$  и  $AB$ ,  $K$  и  $L$  — основания перпендикуляров, опущенных из вершин  $B$  и  $C$  на прямые  $A_1C_1$  и  $A_1B_1$  соответственно,  $O$  — центр окружности девяти точек. Доказать, что прямая  $A_1O$  делит отрезок  $KL$  пополам.

\*  
\*   \*  
\*

**188.** Пусть точки  $A_1, B_1, C_1$  симметричны некоторой точке  $P$  соответственно относительно сторон  $BC, CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$ . Доказать, что: а) окружности, описанные около треугольников  $A_1BC, AB_1C, ABC_1$  имеют общую точку; б) окружности, описанные около треугольников  $A_1B_1C, A_1BC_1, AB_1C_1$  имеют общую точку.

**189.** Пусть  $AB$  — диаметр полукруга,  $M$  — точка на  $AB$ . Точки  $C, D, E$  и  $F$  — лежат на полуокружности так, что  $\angle AMD = \angle EMB, \angle CMA = \angle FMB$ . Пусть  $P$  — точка пересечения прямых  $CD$  и  $EF$ . Доказать, что прямая  $PM$  перпендикулярна  $AB$ .

**190.** Перпендикуляр, восстановленный к стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  в ее середине  $D$ , пересекает окружность, описанную около треугольника  $ABC$ , в точке  $E$  ( $C$  и  $E$  — по одну сторону от  $AB$ ),  $F$  — проекция  $E$  на  $AC$ . Доказать, что прямая  $DF$  делит периметр треугольника  $ABC$  пополам и что три такие прямые, построенные для каждой стороны треугольника, пересекаются в одной точке.

**191.** Доказать, что прямая, делящая периметр и площадь треугольника в одинаковом отношении, проходит через центр вписанной окружности.

**192.** Доказать, что три прямые, проходящие через вершины треугольника и делящие его периметр пополам, пересекаются в одной точке  $N$  (точка Нагеля). Пусть  $M$  — центр тяжести треугольника,  $I$  — центр вписанной окружности,  $S$  — центр окружности, вписанной в треугольник с вершинами в серединах сторон данного. Доказать, что точки  $N, M, I$  и  $S$  лежат на одной прямой, причем  $|MN| = 2|IM|, |IS| = |SN|$ .

\*  
\*   \*  
\*

**193.** Обозначим через  $a, b$  и  $c$  стороны треугольника  $ABC, a + b + c = 2p$ ;  $G$  — точка пересечения его медиан,  $O, I, I_a$  — соответственно центры описанного, вписанного и внеписанного кругов (внеписанный круг касается стороны  $BC$  и продолжения сторон  $AB$  и  $AC$ ),  $R, r, r_a$  — их радиусы. Доказать справедливость следующих соотношений:

а)  $a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr$ ;

б)  $|OG|^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$ ;

в)  $|IG|^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr)$ ;

$$г) |OI|^2 = R^2 - 2Rr \text{ (Эйлера)};$$

$$д) |OI_a|^2 = R^2 + 2Rr_a;$$

$$е) |II_a|^2 = 4R(r_a - r).$$

**194.** Пусть  $BB_1$  и  $CC_1$  — биссектрисы углов  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$ . Доказать (в обозначениях предыдущей задачи), что

$$|B_1C_1| = \frac{abc}{(b+a)(c+a)R} |OI_a|.$$

**195.** Доказать, что точки, симметричные центрам вневписанных окружностей относительно центра описанной окружности, лежат на окружности, концентрической вписанной окружности, с радиусом, равным диаметру описанной окружности.

**196.** Доказать, что сумма площадей трех треугольников, вершинами каждого из которых являются три точки касания вневписанной окружности с соответствующей стороной треугольника и продолжениями двух других сторон, равна удвоенной площади треугольника, сложенной с площадью треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами треугольника.

**197.** Найти сумму квадратов расстояний от точек касания вписанной в данный треугольник окружности с его сторонами до центра описанной, если радиус вписанной окружности равен  $r$ , а радиус описанной —  $R$ .

**198.** Через основания биссектрис треугольника  $ABC$  проведена окружность. Доказать, что одна из хорд, образованных при пересечении этой окружности со сторонами треугольника, равна сумме двух других.

**199.** Пусть  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  — биссектрисы треугольника  $ABC$ ,  $L$  — точка пересечения прямых  $AA_1$  и  $B_1C_1$ ,  $K$  — точка пересечения  $CC_1$  и  $A_1B_1$ . Доказать, что  $BB_1$  является биссектрисой угла  $LBK$ .

**200.** В треугольнике  $ABC$  на сторонах  $AB$  и  $BC$  взяты точки  $K$  и  $L$  так, что  $|AK| = |KL| = |LC|$ . Через точку пересечения прямых  $AL$  и  $CK$  проведена прямая, параллельная биссектрисе угла  $B$ , пересекающая прямую  $AB$  в точке  $M$ . Доказать, что  $|AM| = |BC|$ .

**201.** В треугольнике  $ABC$  биссектриса угла  $B$  пересекает прямую, проходящую через середину  $AC$  и середину высоты, опущенной на  $AC$ , в точке  $M$ ;  $N$  — середина биссектрисы угла  $B$ . Доказать, что биссектриса угла  $C$  является также и биссектрисой угла  $MCN$ .

**202.** а) Доказать, что если в треугольнике равны две биссектрисы, то треугольник равнобедренный (Штейнер, Лемус).

б) Доказать, что если в треугольнике  $ABC$  биссектрисы углов, смежных с углами  $A$  и  $C$ , равны между собой и обе одновременно расположены или внутри или вовне угла  $ABC$ , то  $|AB| = |BC|$ . Верно ли, что из равенства двух внешних биссектрис треугольника следует его равнобедренность?

203. Про данный треугольник известно, что треугольник, образованный основаниями его биссектрис, является равнобедренным. Будет ли верным утверждение, что и данный треугольник является равнобедренным?

\*  
\*   \*

204. Пусть  $ABCDEF$  — вписанный шестиугольник. Обозначим через  $K$  точку пересечения  $AC$  и  $BF$ , а через  $L$  — точку пересечения  $CE$  и  $FD$ . Доказать, что диагонали  $AD$ ,  $BE$  и прямая  $KL$  пересекаются в одной точке (Паскаль).

205. Дан треугольник  $ABC$  и точка  $M$ . Прямая, проходящая через  $M$ , пересекает прямые  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  соответственно в точках  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$ . Прямые  $AM$ ,  $BM$  и  $CM$  пересекают окружность, описанную около треугольника  $ABC$ , соответственно в точках  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$ . Доказать, что прямые  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  и  $C_1C_2$  пересекаются в одной точке, расположенной на окружности, описанной около  $\triangle ABC$ .

206. Через точку пересечения высот треугольника проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Доказать, что середины отрезков, отсекаемых этими прямыми на сторонах треугольника (на прямых, образующих треугольник), лежат на одной прямой.

\*  
\*   \*

207. Даны треугольник  $ABC$  и произвольная точка  $P$ . Основания перпендикуляров, опущенных из  $P$  на стороны треугольника  $ABC$ , служат вершинами треугольника  $A_1B_1C_1$ . Вершинами треугольника  $A_2B_2C_2$  служат точки пересечения прямых  $AP$ ,  $BP$  и  $CP$  с окружностью, описанной около треугольника  $ABC$ , отличные от точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Доказать, что треугольники  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  подобны. Сколько найдется для разностороннего треугольника  $ABC$  таких точек  $P$ , что соответствующие треугольники  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  подобны треугольнику  $ABC$ ?

208. Пусть  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  — основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки  $M$  соответственно на стороны  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  треугольника  $ABC$ . Доказать, что три прямые, проходящие через середины отрезков  $B_1C_1$  и  $MA$ ,  $C_1A_1$  и  $MB$ ,  $A_1B_1$  и  $MC$  пересекаются в одной точке.

209. Пусть  $S$  — площадь данного треугольника,  $R$  — радиус описанного около него круга. Пусть, далее,  $S_1$  — площадь треугольника, образованного основаниями перпендикуляров, опущенных на стороны данного треугольника из точки, удаленной от центра описанного круга на расстояние  $d$ . Доказать, что

$$S_1 = \frac{S}{4} \left| 1 - \frac{d^2}{R^2} \right| \quad (\text{Эйлер}).$$

210. Доказать, что если  $A, B, C$  и  $D$  — произвольные точки плоскости, то четыре окружности, каждая из которых проходит через три точки: середины отрезков  $AB, AC$  и  $AD$ ;  $BA, BC$  и  $BD$ ;  $CA, CB$  и  $CD$ ;  $DA, DB$  и  $DC$ , имеют общую точку.

211. Пусть  $ABC$  — треугольник,  $D$  — произвольная точка плоскости. Треугольник, образованный основаниями перпендикуляров, опущенных из  $D$  на стороны треугольника  $ABC$ , будем называть *педальным треугольником точки  $D$  относительно треугольника  $ABC$* , а окружность, описанную около педального треугольника, — *педальной окружностью*. Обозначим через  $D_1$  точку, в которой пересекаются прямые, симметричные прямым  $AD, BD$  и  $CD$  относительно биссектрис углов  $A, B$  и  $C$  (соответственно) треугольника  $ABC$ . Доказать, что педальные окружности точек  $D$  и  $D_1$  совпадают.

212. Рассмотрим четыре точки плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Доказать, что четыре педальные окружности, каждая из которых соответствует одной из рассматриваемых точек относительно треугольника, вершинами которого являются три оставшиеся, имеют общую точку.

213. Прямая, проходящая через центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , пересекает  $AB$  и  $AC$  в точках  $C_1$  и  $B_1$  соответственно. Доказать, что окружности, построенные на  $BB_1$  и  $CC_1$  как на диаметрах, пересекаются в двух точках, одна из которых лежит на окружности, описанной около  $ABC$ , а другая — на окружности девяти точек треугольника  $ABC$ .

## § 5. Четырехугольник

214. Пусть  $ABCD$  — вписанный четырехугольник,  $AB$  — диаметр. Доказать, что проекции сторон  $AD$  и  $CD$  на прямую  $BC$  равны.

215. Пусть  $ABCD$  — выпуклый четырехугольник,  $O$  — точка пересечения его диагоналей,  $E, F$  и  $G$  — проекции  $B, C$  и  $O$  на  $AD$ . Доказать, что площадь четырехугольника равна

$$\frac{|AD| \cdot |BE| \cdot |CF|}{2|OG|}.$$

**216.** Пусть  $ABCD$  — выпуклый четырехугольник. Рассмотрим четыре окружности, каждая из которых касается трех сторон этого четырехугольника.

а) Доказать, что центры этих окружностей лежат на одной окружности.

б) Пусть  $r_1, r_2, r_3, r_4$  — радиусы этих окружностей ( $r_1$  — не касается стороны  $DC$ , аналогично  $r_2$  не касается стороны  $DA$ ,  $r_3$  —  $AB$ ,  $r_4$  —  $BC$ ). Доказать, что  $\frac{|AB|}{r_1} + \frac{|CD|}{r_3} = \frac{|BC|}{r_2} + \frac{|AD|}{r_4}$ .

**217.** Доказать, что для площади  $S$  вписанного четырехугольника справедлива формула  $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$  ( $p$  — полупериметр,  $a, b, c, d$  — стороны).

**218.** Пусть  $2\varphi$  — сумма двух противоположных углов описанного четырехугольника,  $a, b, c$  и  $d$  — его стороны,  $S$  — площадь. Доказать, что  $S = \sqrt{abcd} \sin \varphi$ .

**219.** На сторонах  $AB$  и  $CD$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  взяты точки  $M$  и  $N$ , делящие их в одинаковом отношении (считая от вершин  $A$  и  $C$ ). Эти точки соединены со всеми вершинами четырехугольника, в результате чего  $ABCD$  разбит на шесть треугольников и один четырехугольник. Доказать, что площадь получившегося четырехугольника равна сумме площадей двух треугольников, прилежащих к сторонам  $BC$  и  $AD$ .

**220.** В окружности проведены диаметр  $AB$  и не пересекающая его хорда  $CD$ . Пусть  $E$  и  $F$  — основания перпендикуляров, опущенных из точек  $A$  и  $B$  на прямую  $CD$ . Доказать, что площадь четырехугольника  $AEFB$  равна сумме площадей треугольников  $ACB$  и  $ADB$ .

**221.** Дан выпуклый четырехугольник  $Q_1$ . Прямые, перпендикулярные его сторонам и проходящие через середины сторон, образуют четырехугольник  $Q_2$ . Точно так же для четырехугольника  $Q_2$  образован четырехугольник  $Q_3$ . Доказать, что четырехугольник  $Q_3$  подобен исходному четырехугольнику  $Q_1$ .

**222.** На противоположных сторонах  $BC$  и  $DA$  выпуклого четырехугольника взяты точки  $M$  и  $N$  так, что  $|BM| : |MC| = |AN| : |ND| = |AB| : |CD|$ . Доказать, что прямая  $MN$  параллельна биссектрисе угла, образованного сторонами  $AB$  и  $CD$ .

**223.** Диагонали разбивают выпуклый четырехугольник на четыре треугольника. Радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники, равны. Доказать, что данный четырехугольник — ромб.

**224.** Диагонали четырехугольника разбивают его на четыре треугольника равного периметра. Доказать, что данный четырехугольник — ромб.



225. О четырехугольнике  $ABCD$  известно, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$  равны. Доказать, что  $ABCD$  — прямоугольник.

226. В окружность вписан четырехугольник  $ABCD$ . Пусть  $M$  — точка пересечения касательных к окружности, проходящих через  $A$  и  $C$ ,  $N$  — точка пересечения касательных, проведенных через  $B$  и  $D$ ,  $K$  — точка пересечения биссектрис углов  $A$  и  $C$  четырехугольника,  $L$  — точка пересечения биссектрис углов  $B$  и  $D$ . Доказать, что если выполняется одно из утверждений: а)  $M$  принадлежит прямой  $BD$ , б)  $N$  принадлежит прямой  $AC$ , в)  $K$  лежит на  $BD$ , г)  $L$  лежит на  $AC$ , то верны остальные три утверждения.

227. Доказать, что четыре прямые, каждая из которых проходит через основания двух перпендикуляров, опущенных из вершины вписанного четырехугольника на не содержащие ее стороны, пересекаются в одной точке.

228. Пусть  $AB$  и  $CD$  — две хорды окружности,  $M$  — точка пересечения перпендикуляров, восстановленных к  $AB$  в точке  $A$  и к  $CD$  в точке  $C$ ,  $N$  — точка пересечения перпендикуляров, восстановленных к  $AB$  и  $CD$  в точках  $B$  и  $D$ . Доказать, что прямая  $MN$  проходит через точку пересечения  $BC$  и  $AD$ .

229. Пусть  $ABCD$  — параллелограмм. Через точки  $A$  и  $B$  проходит окружность радиуса  $R$ . Другая окружность того же радиуса проходит через точки  $B$  и  $C$ . Пусть  $M$  — вторая точка пересечения этих окружностей. Доказать, что радиусы окружностей, описанных около треугольников  $AMD$  и  $CMD$ , равны  $R$ .

230. Пусть  $ABCD$  — параллелограмм. Окружность касается прямых  $AB$  и  $AD$  и пересекает  $BD$  в точках  $M$  и  $N$ . Доказать, что существует окружность, проходящая через  $M$  и  $N$  и касающаяся прямых  $CB$  и  $CD$ .

231. Пусть  $ABCD$  — параллелограмм. Построим на диагонали  $AC$  как на диаметре окружность и обозначим через  $M$  и  $N$  точки пересечения с этой окружностью прямых  $AB$  и  $AD$ . Доказать, что прямые  $BD$ ,  $MN$  и касательная к окружности в точке  $C$  пересекаются в одной точке.

232. Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность,  $O_1, O_2, O_3, O_4$  — центры окружностей, вписанных в треугольники  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$ , а  $H_1, H_2, H_3, H_4$  — точки пересечения высот тех же треугольников. Доказать, что  $O_1O_2O_3O_4$  — прямоугольник, а четырехугольник  $H_1H_2H_3H_4$  равен четырехугольнику  $ABCD$ .

233. Дан треугольник  $ABC$ ,  $D$  — произвольная точка плоскости. Доказать, что точки пересечения высот треугольников  $ABD$ ,  $BCD$ ,  $CAD$  являются вершинами треугольника, равного данному.

234. Доказать, что если в четырехугольник можно вписать окружность, то: а) окружности, вписанные в два треугольника, на которые данный четырехугольник разбивается диагональю, касаются друг друга, б) точки касания этих окружностей со сторонами четырехугольника являются вершинами вписанного четырехугольника.

235. Доказать, что если  $ABCD$  — вписанный четырехугольник, то сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники  $ABC$  и  $ACD$ , равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники  $BCD$  и  $BDA$ .

\*  
\*   \*   \*

236. Теорема Бретшнейдера (теорема косинусов для четырехугольника). Пусть  $a, b, c, d$  — последовательные стороны четырехугольника,  $m$  и  $n$  — его диагонали,  $A$  и  $C$  — два противоположных угла. Тогда выполняется соотношение

$$m^2 n^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2 abcd \cos(A + C).$$

237. Теорема Птолемея. Пусть  $a, b, c, d$  — последовательные стороны вписанного четырехугольника, а  $m$  и  $n$  — его диагонали. Доказать, что  $mn = ac + bd$ .

238. Доказать, что если  $ABC$  — правильный треугольник,  $M$  — произвольная точка плоскости, не лежащая на окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , то существует треугольник, стороны которого равны  $|MA|$ ,  $|MB|$  и  $|MC|$  (теорема Помпею). Найти угол этого треугольника, лежащий против стороны, равной  $|MB|$ , если  $\angle AMC = \alpha$ .

239. Пусть  $ABCD$  — вписанный четырехугольник. Четыре окружности  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$  касаются окружности, описанной около четырехугольника  $ABCD$  соответственно в точках  $A, B, C$  и  $D$ . Обозначим через  $t_{\alpha\beta}$  отрезок касательной к окружностям  $\alpha$  и  $\beta$ , причем  $t_{\alpha\beta}$  — отрезок общей внешней касательной, если  $\alpha$  и  $\beta$  касаются данной одинаковым (внутренним или внешним) образом, и отрезок общей внутренней касательной, если  $\alpha$  и  $\beta$  касаются данной различным образом (аналогично определяются величины  $t_{\beta\gamma}$ ,  $t_{\gamma\delta}$  и т. д.). Доказать, что

$$t_{\alpha\beta} t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma} t_{\delta\alpha} = t_{\alpha\gamma} t_{\beta\delta} \quad (*)$$

(обобщенная теорема Птолемея).

240. Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$  — четыре окружности на плоскости. Доказать, что если выполняется соотношение

$$t_{\alpha\beta} t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma} t_{\delta\alpha} = t_{\alpha\gamma} t_{\beta\delta}, \quad (*)$$

где  $t_{\alpha\beta}$  и т. д. отрезки общих внешних или внутренних касательных к окружностям  $\alpha$  и  $\beta$  и т. д., причем для любых трех окружностей берутся или три внешние касательные или одна внешняя, а две внутренние, то окружности  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  касаются одной окружности.

\*  
\*   \*  
\*

**241.** Продолжения сторон  $AB$  и  $DC$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $K$ , а продолжения сторон  $AD$  и  $BC$  — в точке  $L$ , причем отрезки  $BL$  и  $DK$  пересекаются. Доказать, что если выполняется одно из трех соотношений:  $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$ ,  $|BK| + |BL| = |DK| + |DL|$ ,  $|AK| + |CL| = |AL| + |CK|$ , то выполняются и два других.

**242.** Продолжения сторон  $AB$  и  $DC$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $K$ , а продолжения сторон  $AD$  и  $BC$  — в точке  $L$ , причем отрезки  $BL$  и  $DK$  пересекаются. Доказать, что если выполняется одно из трех соотношений  $|AD| + |DC| = |AB| + |CB|$ ,  $|AK| + |CK| = |AL| + |CL|$ ,  $|BK| + |DK| = |BL| + |DL|$ , то выполняются и два других.

**243.** Доказать, что если существует окружность, касающаяся прямых  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$ , то ее центр и середины  $AC$  и  $BD$  лежат на одной прямой.

**244.** Пусть  $ABCD$  — вписанный четырехугольник. Перпендикуляр к  $BA$ , восстановленный в точке  $A$ , пересекает прямую  $CD$  в точке  $M$ , перпендикуляр к  $DA$ , восстановленный в точке  $A$ , пересекает прямую  $BC$  в точке  $N$ . Доказать, что  $MN$  проходит через центр окружности, описанной около четырехугольника  $ABCD$ .

**245.** Пусть  $ABCD$  — вписанный четырехугольник,  $E$  — произвольная точка прямой  $AB$ ,  $F$  — произвольная точка прямой  $DC$ . Прямая  $AF$  пересекает окружность в точке  $M$ , прямая  $DE$  — в точке  $N$ . Доказать, что прямые  $BC$ ,  $EF$  и  $MN$  пересекаются в одной точке или параллельны.

**246.** Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из точки пересечения диагоналей вписанного четырехугольника на его стороны, являются вершинами четырехугольника, в который можно вписать окружность. Найти радиус этой окружности, если диагонали вписанного четырехугольника перпендикулярны, радиус данной окружности равен  $R$ , а расстояние от ее центра до точки пересечения диагоналей равно  $d$ .

**247.** Диагонали вписанного четырехугольника перпендикулярны. Доказать, что середины его сторон и основания перпендикуляров, опущенных на стороны из точки пересечения диагоналей, лежат на одной окружности. Найти радиус этой

окружности, если радиус данной окружности равен  $R$ , а расстояние от ее центра до точки пересечения диагоналей четырехугольников равно  $d$ .

**248.** Доказать, что если четырехугольник вписан в окружность радиуса  $R$  и одновременно описан около окружности радиуса  $r$ , причем расстояние между центрами этих окружностей равно  $d$ , то выполняется соотношение  $\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} =$

$= 1/r^2$ ; при этом существует бесконечно много четырехугольников, одновременно вписанных в большую окружность и описанных около меньшей окружности (в качестве одной из вершин можно взять любую точку большей окружности).

**249.** Выпуклый четырехугольник разделен диагоналями на четыре треугольника. Доказать, что прямая, соединяющая центры тяжести двух противоположных треугольников, перпендикулярна прямой, соединяющей точки пересечения высот двух других треугольников.

**250.** Пусть  $ABCD$  — вписанный четырехугольник,  $M$  и  $N$  — середины  $AC$  и  $BD$ . Доказать, что если  $BD$  является биссектрисой угла  $ANC$ , то и  $AC$  — биссектриса угла  $BMD$ .

**251.** Пусть  $ABCD$  — вписанный четырехугольник. Противоположные стороны  $AB$  и  $CD$  при продолжении пересекаются в точке  $K$ , а стороны  $BC$  и  $AD$  — в точке  $L$ . Доказать, что биссектрисы углов  $BKC$  и  $BLA$  перпендикулярны и пересекаются на прямой, соединяющей середины  $AC$  и  $BD$ .

**252.** Диагонали четырехугольника перпендикулярны. Доказать, что четыре прямые, каждая из которых соединяет одну из вершин четырехугольника и центр окружности, проходящей через эту вершину и две смежные с нею вершины четырехугольника, пересекаются в одной точке.

**253.** Пусть  $P$ ,  $Q$  и  $M$  — соответственно точки пересечения диагоналей вписанного четырехугольника и продолжений его противоположных сторон. Доказать, что точка пересечения высот треугольника  $PQM$  совпадает с центром окружности, описанной около данного четырехугольника (Брокер).

**254.** Пусть  $ABCD$  — описанный четырехугольник,  $K$  — точка пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ ,  $L$  — точка пересечения прямых  $AD$  и  $BC$ . Доказать, что точка пересечения высот треугольника, образованного прямыми  $KL$ ,  $AC$  и  $BD$  совпадает с центром окружности, вписанной в четырехугольник  $ABCD$ .

**255.** Пусть  $ABCD$  — выпуклый четырехугольник,  $\angle ABC = \angle ADC$ ,  $M$  и  $N$  — основания перпендикуляров, опущенных из  $A$  на  $BC$  и  $CD$  соответственно,  $K$  — точка пересечения прямых  $MD$  и  $NB$ . Доказать, что прямые  $AK$  и  $MN$  перпендикулярны.

**256.** Доказать, что четыре окружности, описанные около четырех треугольников, образованных четырьмя пересекающимися прямыми плоскости, имеют общую точку (*точка Микеля*).

**257.** Доказать, что центры четырех окружностей, описанных около четырех треугольников, образованных четырьмя пересекающимися прямыми плоскости, лежат на одной окружности.

**258.** Даны четыре попарно пересекающиеся прямые. Пусть  $M$  — точка Микеля, соответствующая этим прямым (см. задачу II. 256). Доказать, что если четыре из шести точек попарного пересечения данных прямых лежат на окружности с центром  $O$ , то прямая, проходящая через две оставшиеся точки, содержит точку  $M$  и перпендикулярна прямой  $OM$ .

**259.** Четыре попарно пересекающиеся прямые образуют четыре треугольника. Доказать, что если одна прямая параллельна прямой Эйлера (см. задачу II. 147) треугольника, образованного тремя другими прямыми, то этим же свойством обладает и любая другая прямая.

**260.** Дан треугольник  $ABC$ . Прямая пересекает прямые  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  соответственно в точках  $D$ ,  $E$  и  $F$ . Прямые  $DC$ ,  $AE$  и  $BF$  образуют треугольник  $KLM$ . Доказать, что окружности, построенные на  $DC$ ,  $AE$  и  $BF$  как на диаметрах, пересекаются в двух точках  $P$  и  $N$  (предполагается, что эти окружности попарно пересекаются), причем прямая  $PN$  проходит через центр окружности, описанной около треугольника  $KLM$ , а также через точки пересечения высот треугольников  $ABC$ ,  $BDE$ ,  $DAF$  и  $CEF$ .

**261.** Дан треугольник  $ABC$ . Произвольная прямая пересекает прямые  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  соответственно в точках  $D$ ,  $E$  и  $F$ . Доказать, что точки пересечения высот треугольников  $ABC$ ,  $BDE$ ,  $DAF$  и  $CEF$  лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой Гаусса (см. задачу II. 53).

**262.** Доказать, что срединные перпендикуляры, восстановленные к отрезкам, соединяющим точки пересечения высот и центры описанных окружностей четырех треугольников, образованных четырьмя произвольными прямыми плоскости, пересекаются в одной точке (*точка Эрвея*).

**263.** Рассмотрим шестнадцать точек, являющихся центрами всевозможных вписанных и невписанных окружностей для четырех треугольников, образованных четырьмя пересекающимися прямыми плоскости. Доказать, что эти шестнадцать точек можно разбить на четыре четверки двумя способами так, что каждая четверка лежит на одной окружности. Центры этих

окружностей при разбиении первым способом лежат на одной прямой, а при разбиении вторым способом — на другой прямой. Эти прямые перпендикулярны и пересекаются в точке Микеля — общей точке описанных около четырех треугольников окружностей.

## § 6. Окружности и касательные. Теорема Фейербаха

**264.** На прямой расположены последовательно точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  так, что  $|BC| = 2|AB|$ ,  $|CD| = |AC|$ . Одна окружность проходит через точки  $A$  и  $C$ , а другая — через точки  $B$  и  $D$ . Доказать, что общая хорда этих окружностей делит отрезок  $AC$  пополам.

**265.** Пусть  $B$  — точка отрезка  $AC$ . Фигура, ограниченная дугами трех полуокружностей с диаметрами  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$ , расположенными по одну сторону от прямой  $AC$ , носит название *сапожный нож*, или *арбелос Архимеда*. Доказать, что радиусы двух окружностей, каждая из которых касается двух полуокружностей и прямой, перпендикулярной  $AC$  и проходящей через  $B$ , равны между собой (задача Архимеда).

**266.** Три окружности проходят через две данные точки плоскости каждая. Пусть  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  — их центры. Прямая, проходящая через одну из точек, общую всем трем окружностям, вторично пересекает их соответственно в точках  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ . Доказать, что  $|A_1A_2| : |A_2A_3| = |O_1O_2| : |O_2O_3|$ .

**267.** Даны две непересекающиеся окружности. Доказать, что четыре точки касания общих внешних касательных к этим окружностям лежат на одной окружности; точно так же четыре точки касания общих внутренних касательных лежат на одной окружности и четыре точки пересечения общих внутренних касательных с общими внешними касательными лежат на третьей окружности; при этом все три окружности — концентрические.

**268.** Даны две непересекающиеся окружности. Третья окружность касается обеих данных внешним образом и имеет центр на прямой, проходящей через центры данных. Доказать, что третья окружность пересекает общие внутренние касательные к данным окружностям в четырех точках, образующих четырехугольник, две стороны которого параллельны общим внешним касательным к данным окружностям.

**269.** Даны две окружности. Через центр одной из них проведена прямая, пересекающая эту окружность в точках  $A$  и  $C$ , а другую окружность — в точках  $B$  и  $D$ . Доказать, что если  $|AB| : |BC| = |AD| : |DC|$ , то окружности перпендикулярны, т. е.

угол между касательными к ним в точке их пересечения — прямой.

**270.** Точки  $A, B, C$  и  $D$  лежат на одной окружности или на прямой; через точки  $A$  и  $B, B$  и  $C, C$  и  $D, D$  и  $A$  проведены четыре окружности. Обозначим через  $B_1, C_1, D_1$  и  $A_1$  точки пересечения (отличные от  $A, B, C$  и  $D$ ) соответственно первой и второй, второй и третьей, третьей и четвертой, четвертой и первой окружностей. Доказать, что точки  $A_1, B_1, C_1$  и  $D_1$  лежат на одной окружности (или на прямой).

**271.** Пусть из точки  $A$ , взятой вне окружности, проведены к окружности две касательные  $AM$  и  $AN$  ( $M$  и  $N$  — точки касания) и две секущие, и пусть  $P$  и  $Q$  — точки пересечения окружности с первой секущей, а  $K$  и  $L$  — со второй. Доказать, что прямые  $PK, QL$  и  $MN$  пересекаются в одной точке или параллельны.

Получить отсюда способ построения с помощью одной линейки касательной к данной окружности, проходящей через данную точку.

**272.** Дана окружность с центром  $O$  и точка  $A$ . Пусть  $B$  — произвольная точка окружности. Найти геометрическое место точек пересечения касательных к окружности в точке  $B$  с прямой, проходящей через  $O$  перпендикулярно  $AB$ .

**273.** Даны окружность и две точки  $A$  и  $B$  на ней. Пусть  $N$  — произвольная точка прямой  $AB$ . Построим две окружности, каждая из которых проходит через точку  $N$  и касается данной: одна в точке  $A$ , а другая в точке  $B$ . Обозначим через  $M$  вторую точку пересечения этих окружностей. Найти геометрическое место точек  $M$ .

**274.** Через фиксированную точку  $A$  внутри окружности проведены две произвольные хорды  $PQ$  и  $KL$ . Найти геометрическое место точек пересечения прямых  $PK$  и  $QL$ .

**275.** Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Произвольная прямая проходит через  $B$  и вторично пересекает первую окружность в точке  $C$ , вторую — в точке  $D$ . Касательные к первой окружности в  $C$ , а ко второй — в  $D$  пересекаются в точке  $M$ . Через точку пересечения  $AM$  и  $CD$  проходит прямая, параллельная  $CM$ , пересекающая  $AC$  в точке  $K$ . Доказать, что  $KB$  касается второй окружности.

**276.** Дана окружность и касательная к ней  $l$ . Пусть  $N$  — точка касания,  $NM$  — диаметр. На прямой  $NM$  взята фиксированная точка  $A$ . Рассмотрим произвольную окружность, проходящую через  $A$ , с центром на  $l$ . Пусть  $C$  и  $D$  — точки пересечения этой окружности с  $l$ , а  $P$  и  $Q$  — точки пересечения прямых  $MC$  и  $MD$  с данной окружностью. Доказать, что хорда  $PQ$  проходит через фиксированную точку плоскости.

277. Точки  $O_1$  и  $O_2$  — центры двух пересекающихся окружностей,  $A$  — одна из точек их пересечения. К окружностям проведены две общие касательные,  $BC$  и  $EF$  — хорды этих окружностей с концами в точках касания ( $C$  и  $F$  наиболее удалены от  $A$ ),  $M$  и  $N$  — середины  $BC$  и  $EF$ . Доказать, что  $\angle O_1AO_2 = \angle MAN = 2\angle CAE$ .

278. В окружности проведен диаметр  $AB$ ,  $CD$  — хорда, перпендикулярная  $AB$ . Произвольная окружность касается хорды  $CD$  и дуги  $CBD$ . Доказать, что касательная к этой окружности, проведенная из точки  $A$ , равна  $AC$ .

279. Дан круговой сегмент. Две произвольные окружности касаются хорды и дуги этого сегмента и пересекаются в точках  $M$  и  $N$ . Доказать, что прямая  $MN$  проходит через фиксированную точку плоскости.

\*  
\*   \*   \*

280. Даны два равных непересекающихся круга. На двух общих внутренних касательных берем две произвольные точки  $F$  и  $F'$ . Из обеих точек к каждому кругу можно провести еще по одной касательной. Пусть касательные, проведенные из точек  $F$  и  $F'$  к одному кругу, встречаются в точке  $A$ , к другому — в точке  $B$ . Требуется доказать, что: 1) прямая  $AB$  параллельна прямой, соединяющей центры кругов (в случае неравных кругов проходит через точку пересечения внешних касательных); 2) прямая, соединяющая середины  $FF'$  и  $AB$  проходит через середину отрезка, соединяющего центры кругов.

(Эта задача была предложена читателям журнала «Вестник опытной физики и элементарной математики» профессором В. Ермаковым. Журнал этот издавался в России в прошлом веке. Задача была опубликована в 14 (2)-м номере журнала за 1887 г. За решение задачи читателям была обещана премия — литература по математике.)

281. Даны три окружности  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Пусть  $l_1$  и  $l_2$  — общие внутренние касательные к окружностям  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $m_1$  и  $m_2$  — общие внутренние касательные к окружностям  $\beta$  и  $\gamma$ ,  $n_1$  и  $n_2$  — общие внутренние касательные к окружностям  $\gamma$  и  $\alpha$ . Доказать, что если прямые  $l_1$ ,  $m_1$  и  $n_1$  пересекаются в одной точке, то и прямые  $l_2$ ,  $m_2$  и  $n_2$  также пересекаются в одной точке.

282. Дуга  $AB$  окружности разделена на три равные части точками  $C$  и  $D$  ( $C$  — ближайшая к  $A$  точка). После поворота вокруг  $A$  на угол  $\pi/3$  точки  $B$ ,  $C$  и  $D$  перейдут соответственно в  $B_1$ ,  $C_1$  и  $D_1$ ,  $F$  — точка пересечения прямых  $AB_1$  и  $DC_1$ ,  $E$  — точка на биссектрисе угла  $B_1BA$  такая, что  $|BD| = |DE|$ . Доказать, что треугольник  $CEF$  правильный (Финлей).



\*  
\*   \*   \*

**283.** Дан угол с вершиной  $A$  и окружность, вписанная в него. Произвольная прямая, касающаяся данной окружности, пересекает стороны угла в точках  $B$  и  $C$ . Доказать, что окружность, описанная около треугольника  $ABC$ , касается фиксированной окружности, вписанной в данный угол.

**284.** В треугольнике  $ABC$  на стороне  $AC$  взята точка  $D$ . Рассмотрим окружность, касающуюся отрезка  $AD$  в точке  $M$ , отрезка  $BD$  и окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Доказать, что прямая, проходящая через  $M$  параллельно  $BD$ , касается окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

**285.** В треугольнике  $ABC$  на стороне  $AC$  взята точка  $D$ . Пусть  $O_1$  — центр окружности, касающейся отрезков  $AD$ ,  $BD$  и окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , а  $O_2$  — центр окружности, касающейся отрезков  $CD$ ,  $BD$  и описанной окружности. Доказать, что прямая  $O_1O_2$  проходит через центр вписанной в треугольник  $ABC$  окружности — точку  $O$ , — причем  $|O_1O| : |OO_2| = \operatorname{tg}^2(\varphi/2)$ , где  $\varphi = \angle BDA$  (В и к т о р Т е б о).

**286.** Каждая из четырех окружностей касается изнутри данной окружности и двух ее пересекающихся хорд. Доказать, что диагонали четырехугольника с вершинами в центрах этих окружностей взаимно перпендикулярны.

\*  
\*   \*   \*

**287.** Доказать, что окружность девяти точек (см. задачу П. 160) касается вписанной в треугольник окружности и всех вне-вписанных окружностей (Фейербаха).

**288.** Пусть  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ . Доказать, что окружность девяти точек касается всех вписанных и вне-вписанных окружностей треугольников  $AHB$ ,  $BHC$ ,  $CHA$ .

**289.** Доказать, что точка пересечения диагоналей четырехугольника с вершинами в точках касания окружности девяти точек треугольника  $ABC$  со вписанной и вне-вписанными окружностями этого треугольника лежит на его средней линии.

**290.** Обозначим через  $F$ ,  $F_a$ ,  $F_b$  и  $F_c$  точки касания окружности девяти точек треугольника  $ABC$  со вписанной и тремя вне-вписанными окружностями ( $F_a$  точка касания с окружностью, центр которой  $I_a$  и т. д.). Пусть далее  $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$ ,  $C_1$  и  $C_2$  — точки пересечения с противоположными сторонами бис-

сектрис внутренних и внешних углов  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно. Доказать подобие следующих треугольников:  $\triangle F_a F_b F_c$  и  $\triangle A_1 B_1 C_1$ ,  $\triangle F F_b F_c$  и  $\triangle A_1 B_2 C_2$ ,  $\triangle F F_c F_a$  и  $\triangle B_1 C_2 A_2$ ,  $\triangle F F_a F_b$  и  $\triangle C_1 A_2 B_2$  (Виктор Тебо).

## § 7. Комбинация фигур. Перемещения на плоскости. Многоугольники

**291.** На сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  во внешнюю сторону построены квадраты  $BCDE$ ,  $ACFG$ ,  $BAHK$ . Пусть  $FCDQ$  и  $EBKP$  — параллелограммы. Доказать, что треугольник  $APQ$  — равнобедренный прямоугольный.

**292.** Пусть  $ABCD$  — прямоугольник,  $E$  — точка на  $BC$ ,  $F$  — на  $DC$ ,  $E_1$  — середина  $AE$ ,  $F_1$  — середина  $AF$ . Доказать, что если  $\triangle AEF$  правильный, то и треугольники  $DE_1C$  и  $BF_1C$  также правильные.

**293.** На катетах  $AC$  и  $BC$  прямоугольного треугольника во внешнюю сторону построены квадраты  $ACKL$  и  $BCMN$ . Доказать, что четырехугольник, ограниченный катетами и прямыми  $LB$  и  $NA$ , равновелик треугольнику, образованному прямыми  $LB$ ,  $NA$  и гипотенузой  $AB$ .

**294.** На сторонах выпуклого четырехугольника во внешнюю сторону построены квадраты. Доказать, что если диагонали четырехугольника перпендикулярны, то отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, проходят через точку пересечения диагоналей четырехугольника.

**295.** Доказать, что если центры квадратов, построенных на сторонах данного треугольника во внешнюю сторону, служат вершинами треугольника, площадь которого в два раза больше площади данного, то центры квадратов, построенных на сторонах треугольника во внутрь его, лежат на одной прямой.

**296.** На сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  во внешнюю сторону построены треугольники  $A_1BC$ ,  $B_1CA$  и  $C_1AB$  так, что  $\angle A_1BC = \angle C_1BA$ ,  $\angle C_1AB = \angle B_1AC$ ,  $\angle B_1CA = \angle A_1CB$ . Доказать, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в одной точке.

**297.** Пусть  $ABC$  — равнобедренный треугольник ( $|AB| = |BC|$ );  $BD$  — его высота. Круг радиуса  $BD$  катится по прямой  $AC$ . Доказать, что пока вершина  $B$  находится внутри круга, дуга окружности, расположенная внутри треугольника, имеет постоянную длину.

**298.** По двум пересекающимся прямым с равными скоростями движутся две точки. Доказать, что найдется такая фиксированная точка плоскости, которая во все моменты времени от них равноудалена.

**299.** Два велосипедиста едут по двум пересекающимся окружностям. Каждый едет по своей окружности с постоянной скоростью. Выехав одновременно из одной точки, где пересекаются окружности, и сделав по одному обороту, велосипедисты вновь встретились в этой точке. Доказать, что существует такая неподвижная точка, расстояния от которой до велосипедистов все время одинаковы, если они едут: а) в одном направлении (по часовой стрелке); б) в разных направлениях.

**300.** Доказать, что: а) поворот вокруг точки  $O$  на угол  $\alpha$  эквивалентен последовательному применению двух осевых симметрий, оси которых проходят через точку  $O$ , а угол между осями  $\alpha/2$ ; параллельный же перенос эквивалентен двум осевым симметриям с параллельными осями; б) два последовательных поворота вокруг точки  $O_1$  на угол  $\alpha$  и вокруг точки  $O_2$  на угол  $\beta$  ( $0 \leq \alpha < 2\pi$ ,  $0 \leq \beta < 2\pi$ , повороты делаются в одном направлении) эквивалентны одному повороту на угол  $\alpha + \beta$  вокруг некоторой точки  $O$ , если  $\alpha + \beta \neq 2\pi$ . Найти углы треугольника  $O_1O_2O$ .

**301.** Дан произвольный треугольник  $ABC$ . На его сторонах как на основаниях построены три равнобедренных треугольника  $AKB$ ,  $BLC$ ,  $CMA$  с углами при вершинах  $K$ ,  $L$  и  $M$ , равными  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ ,  $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ . Причем все три треугольника расположены или вне треугольника  $ABC$  или внутри его. Доказать, что углы треугольника  $KLM$  равны  $\alpha/2$ ,  $\beta/2$ ,  $\gamma/2$ .

**302.** Пусть  $ABCDEF$  — вписанный шестиугольник, в котором  $|AB| = |CD| = |EF| = R$ , где  $R$  — радиус окружности,  $O$  — ее центр. Доказать, что точки попарных пересечений окружностей, описанных около треугольников  $BOC$ ,  $DOE$ ,  $FOA$ , отличные от  $O$ , служат вершинами правильного треугольника со стороной  $R$ .

**303.** На сторонах выпуклого четырехугольника во внешнюю сторону построены ромбы, острый угол каждого из них равен  $\alpha$ . При этом углы двух ромбов, прилежащие к одной вершине четырехугольника, равны. Доказать, что отрезки, соединяющие центры противоположных ромбов, равны, а острый угол между этими отрезками равен  $\alpha$ .

**304.** Дан произвольный треугольник. На его сторонах вовне построены равносторонние треугольники, центры которых служат вершинами треугольника  $\Delta$ . Центры равносторонних треугольников, построенных на сторонах исходного внутри его, служат вершинами другого треугольника  $\delta$ . Доказать, что: а) треугольники  $\Delta$  и  $\delta$  равносторонние; б) центры треугольников  $\Delta$  и  $\delta$  совпадают с центром тяжести исходного; в) разность площадей треугольников  $\Delta$  и  $\delta$  равна площади исходного.

**305.** На плоскости даны три точки. Через эти точки проведены три прямые, образующие правильный треугольник. Найти геометрическое место центров этих треугольников.

**306.** Дан треугольник  $ABC$ . На прямой, проходящей через вершину  $A$  и перпендикулярной стороне  $BC$ , взяты две точки  $A_1$  и  $A_2$  так, что  $|AA_1| = |AA_2| = |BC|$  ( $A_1$  ближе к прямой  $BC$ , чем  $A_2$ ). Аналогично, на прямой, перпендикулярной  $AC$  и проходящей через  $B$ , взяты точки  $B_1$  и  $B_2$  так, что  $|BB_1| = |BB_2| = |AC|$ . Доказать, что отрезки  $A_1B_2$  и  $A_2B_1$  равны и взаимно перпендикулярны.

\*  
\*   \*

**307.** Доказать, что описанный многоугольник, все стороны которого равны, является правильным, если число сторон нечетно.

**308.** Через центр правильного  $n$ -угольника, вписанного в единичную окружность, проведена прямая. Найти сумму квадратов расстояний до этой прямой от вершин  $n$ -угольника.

**309.** Доказать, что сумма расстояний от произвольной точки внутри выпуклого многоугольника до его сторон постоянна, если: а) все стороны многоугольника равны; б) все углы многоугольника равны.

**310.** Полуокружность разделена точками  $A_0, A_1, \dots, A_{2n+1}$  на  $2n+1$  равных дуг ( $A_0$  и  $A_{2n+1}$  — концы полуокружности),  $O$  — центр полуокружности. Доказать, что прямые  $A_1A_{2n}, A_2A_{2n-1}, \dots, A_nA_{n+1}$  образуют при пересечении с прямыми  $OA_n$  и  $OA_{n+1}$  отрезки, сумма длин которых равна радиусу окружности.

**311.** Доказать, что если из произвольной точки окружности опустить перпендикуляры на стороны вписанного  $2n$ -угольника, то произведения длин этих перпендикуляров через один будут равны.

**312.** Пусть  $A_1A_2 \dots A_n$  — вписанный многоугольник; центр окружности находится внутри многоугольника. Система окружностей касается данной изнутри в точках  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , причем одна из точек пересечения двух соседних окружностей лежит на соответствующей стороне многоугольника. Доказать, что если  $n$  нечетно, то все окружности имеют равные радиусы. Длина внешней границы объединения вписанных окружностей равна длине данной окружности.

**313.** Рассмотрим окружность, в которую вписан правильный  $(2n+1)$ -угольник  $A_1A_2 \dots A_{2n+1}$ . Пусть  $A$  — произвольная точка дуги  $A_1A_{2n+1}$ .

а) Доказать, что сумма расстояний от  $A$  до вершин с четными номерами равна сумме расстояний от  $A$  до вершин с нечетными номерами.

б) Построим равные окружности, касающиеся данной одинаковым образом в точках  $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ . Доказать, что сумма касательных, проведенных из  $A$  к окружностям, касающимся данной в вершинах с четными номерами, равна сумме касательных, проведенных к окружностям, касающимся данной в вершинах с нечетными номерами.

**314.** а) К данной окружности проведены две касательные. Пусть  $A$  и  $B$  — точки касания,  $C$  — точка пересечения касательных. Проведем произвольную прямую  $l$ , касающуюся данной окружности, не проходящую через  $A$  и  $B$ . Пусть  $u$  и  $v$  — расстояния до  $l$  от  $A$  и  $B$ ,  $w$  — расстояние до  $l$  от  $C$ . Найти  $uv/w^2$ , если  $\angle ACB = \alpha$ .

б) Вокруг окружности описан многоугольник. Пусть  $l$  — произвольная прямая, касающаяся окружности и не совпадающая ни с одной из сторон многоугольника. Доказать, что отношение произведения расстояний от вершин многоугольника до  $l$  к произведению расстояний от точек касания сторон многоугольника с окружностью до  $l$  не зависит от положения прямой  $l$ .

в) Пусть  $A_1 A_2 \dots A_{2n}$  — описанный около окружности  $2n$ -угольник,  $l$  — произвольная касательная к окружности. Доказать, что произведение расстояний до  $l$  от вершин с нечетными номерами и произведение расстояний до  $l$  от вершин с четными номерами находятся в постоянном отношении, не зависящем от  $l$  (предполагается, что  $l$  не содержит вершин многоугольника).

**315.** Во вписанном многоугольнике проведены непересекающиеся диагонали, разбивающие его на треугольники. Доказать, что сумма радиусов окружностей, вписанных в эти треугольники, не зависит от того, как проведены диагонали.

**316.** Пусть  $A_1 A_2 \dots A_n$  — многоугольник периметра  $2p$ , описанный около окружности радиуса  $r$ ,  $B_1, B_2, \dots, B_n$  — соответственно точки касания сторон  $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_n A_1$  с окружностью,  $M$  — точка, находящаяся на расстоянии  $d$  от центра окружности. Доказать, что

$$|MB_1|^2 \cdot |A_1 A_2| + |MB_2|^2 \cdot |A_2 A_3| + \dots + |MB_n|^2 \cdot |A_n A_1| = 2p(r^2 + d^2).$$

**317.** Пусть  $ABCD$  — вписанный четырехугольник,  $M$  — произвольная точка окружности. Доказать, что проекции точки  $M$  на прямые Симсона (см. задачу II.153), соответствующие

щие точке  $M$  относительно треугольников  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDA$  и  $DAB$ , лежат на одной прямой (прямая Симсона четырехугольника).

Далее по индукции определим прямую Симсона  $(n + 1)$ -угольника через прямую Симсона  $n$ -угольника. А именно, для произвольного вписанного  $(n + 1)$ -угольника и точки  $M$  на окружности проекции этой точки на всевозможные прямые Симсона этой точки относительно всевозможных  $n$ -угольников, образованных  $n$  вершинами этого  $(n + 1)$ -угольника, лежат на одной прямой — прямой Симсона  $(n + 1)$ -угольника.

**318.** Внутри окружности  $\alpha$  находится окружность  $\beta$ . На окружности  $\alpha$  заданы две последовательности точек:  $A_1, A_2, A_3 \dots$  и  $B_1, B_2, B_3 \dots$ , следующие в одном и том же направлении, и такие, что прямые  $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 \dots$  и  $B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 \dots$  касаются окружности  $\beta$ . Доказать, что прямые  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 \dots$  касаются одной окружности, центр которой находится на прямой, проходящей через центры окружностей  $\alpha$  и  $\beta$ .

**319.** Используя результат предыдущей задачи, доказать следующее утверждение (теорема Понселе). Если существует один  $n$ -угольник, вписанный в некоторую окружность  $\alpha$  и описанный около другой окружности  $\beta$ , то существует бесконечно много  $n$ -угольников, вписанных в окружность  $\alpha$  и описанных около окружности  $\beta$ , причем за одну из вершин такого  $n$ -угольника можно взять любую точку окружности  $\alpha$ .

**320.** На сторонах правильного треугольника  $PQR$  как на основаниях во внешнюю по отношению к треугольнику  $PQR$  сторону построены равнобедренные треугольники  $PXQ, QYR$  и  $RZP$ , причем  $\angle PXQ = \frac{1}{3}(\pi + 2\angle A)$ ,  $\angle QYR = \frac{1}{3}(\pi + 2\angle B)$ ,

$\angle RZP = \frac{1}{3}(\pi + 2\angle C)$ , где  $A, B, C$  — углы некоторого треугольника  $ABC$ . Пусть  $A_0$  — точка пересечения прямых  $ZP$  и  $YQ$ ,  $B_0$  — точка пересечения прямых  $XQ$  и  $ZR$ ,  $C_0$  — прямых  $YR$  и  $XP$ . Доказать, что углы треугольника  $A_0B_0C_0$  равны соответствующим углам треугольника  $ABC$ .

Используя полученный результат, доказать следующую теорему Морлея: если углы произвольного треугольника разделены на три равные части каждый (получившиеся прямые называются *трисектрисами*), то три точки, являющиеся точками пересечения пар трисектрис, прилежащих к соответствующим сторонам треугольника, являются вершинами правильного треугольника.

**321.** Будем считать, что вершины треугольника  $ABC$  следуют друг за другом в положительном — против часовой

стрелки — порядке. Для любых двух лучей  $\alpha$  и  $\beta$  символом  $(\widehat{\alpha, \beta})$  будем обозначать угол, на который надо повернуть луч  $\alpha$  против часовой стрелки до совпадения с лучом  $\beta$ . Обозначим через  $\alpha_1$  и  $\alpha'_1$  два луча, выходящие из  $A$ , для которых  $(\widehat{AB, \alpha_1}) = (\widehat{\alpha_1, \alpha'_1}) = (\widehat{\alpha'_1, AC}) = \frac{1}{3} \angle A$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha'_2$  — лучи, для которых  $(\widehat{AB, \alpha_2}) = (\widehat{\alpha_2, \alpha'_2}) = (\widehat{\alpha'_2, AC}) = \frac{1}{3} (\angle A + 2\pi)$ , и, наконец,  $\alpha_3$  и  $\alpha'_3$  — лучи, для которых  $(\widehat{AB, \alpha_3}) = (\widehat{\alpha_3, \alpha'_3}) = (\widehat{\alpha'_3, AC}) = \frac{1}{3} (\angle A + 4\pi)$  ( $\alpha_i, \alpha'_i$ , где  $i = 1, 2, 3$ , соответственно будем называть *трисектрисами первого, второго и третьего родов*). Точно так же для вершин  $B$  и  $C$  определим  $\beta_j, \beta'_j$  и  $\gamma_k, \gamma'_k$  ( $j, k = 1, 2, 3$ ). Через  $\alpha_i \beta_j \gamma_k$  будем обозначать треугольник, образованный при пересечении соответственно прямых (не лучей)  $\alpha_i$  и  $\beta'_j, \beta_j$  и  $\gamma'_k, \gamma_k$  и  $\alpha'_i$ . Доказать, что при всех  $i, j, k$  таких, что  $i + j + k - 1$  не кратно трем, треугольники  $\alpha_i \beta_j \gamma_k$  — правильные, их стороны параллельны, а вершины расположены на девяти прямых, по шести на каждой прямой (полная теорема Морлея).

## § 8. Геометрические неравенства. Задачи на максимум и минимум

**322.** В начале XIX века итальянским геометром Мальфатти была поставлена следующая задача: из данного треугольника вырезать три круга так, чтобы сумма их площадей была наибольшей. В более поздних исследованиях под *окружностями Мальфатти* стали понимать три окружности, попарно касающиеся друг друга, каждая из которых касается также двух сторон данного треугольника. Доказать, что для правильного треугольника окружности Мальфатти не дают решения первоначальной задачи. (Лишь в середине XX века было установлено, что окружности Мальфатти ни для какого треугольника не дают решения первоначальной задачи.)

**323.** Доказать, что  $p \geq \frac{3}{2} \sqrt{6Rr}$ , где  $p$  — полупериметр,  $r$  и  $R$  — радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника.

**324.** Доказать, что периметр треугольника, вершинами которого являются основания высот данного остроугольного треугольника, не превосходит половины периметра данного треугольника.

**325.** Доказать, что если треугольник, составленный из медиан данного треугольника, является тупоугольным, то меньший угол исходного треугольника меньше  $45^\circ$ .

**326.** Пусть  $ABCD$  — выпуклый четырехугольник. Доказать, что хотя бы один из четырех углов  $BAC$ ,  $DBC$ ,  $ACD$ ,  $BDA$  не превосходит  $\pi/4$ .

**327.** Доказать, что медиана к большей стороне треугольника образует со сторонами, ее заключающими, углы, величина каждого из которых не меньше половины наименьшего угла треугольника.

**328.** Доказать, что если в треугольнике  $ABC$  угол  $B$  тупой и  $|AB| = |AC|/2$ , то  $\angle C > \angle A/2$ .

**329.** Доказать, что окружность, описанная около треугольника, не может проходить через центр вневписанной окружности.

**330.** В треугольнике из вершины  $A$  выходят медиана, биссектриса и высота. Какой угол больше: между медианой и биссектрисой или между биссектрисой и высотой, если угол  $A$  дан?

**331.** Доказать, что если медианы, проведенные из вершин  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  перпендикулярны, то  $\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C \geq 2/3$ .

**332.** Дан треугольник  $ABC$ ,  $|AB| < |BC|$ . Доказать, что для произвольной точки  $M$  на медиане, проведенной из вершины  $B$ ,  $\angle BAM > \angle BCM$ .

**333.** Из внешней точки  $A$  к окружности проведены две касательные  $AB$  и  $AC$  и середины их  $D$  и  $E$  соединены прямой  $DE$ . Доказать, что эта прямая не пересекает окружность.

**334.** Доказать, что если прямая не пересекает окружность, то для любых двух точек прямой расстояние между ними заключено между суммой и разностью длин касательных, проведенных из этих точек к окружности. Доказать обратное утверждение: если для каких-то двух точек прямой утверждение не выполняется, то прямая пересекает окружность.

**335.** В треугольнике  $ABC$  углы связаны соотношением  $3\angle A - \angle C < \pi$ . Угол  $B$  разделен на четыре равные части прямыми, пересекающими сторону  $AC$ . Доказать, что третий из отрезков, на которые разделена сторона  $AC$ , считая от вершины  $A$ , меньше  $|AC|/4$ .

**336.** Пусть  $a, b, c, d$  — последовательные стороны четырехугольника. Доказать, что если  $S$  — его площадь, то  $S \leq (ac + bd)/2$ , причем равенство имеет место только для вписанного четырехугольника, диагонали которого перпендикулярны.

**337.** Доказать, что если длины биссектрис треугольника меньше 1, то его площадь меньше  $\sqrt{3}/3$ .



338. Доказать, что треугольник будет остроугольным, прямоугольным или тупоугольным в зависимости от того, будет ли выражение  $a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2$  положительно, равно нулю или отрицательно ( $a, b, c$  — стороны треугольника,  $R$  — радиус описанного круга).

339. Доказать, что треугольник будет остроугольным, прямоугольным или тупоугольным в зависимости от того, будет ли его полупериметр соответственно больше, равен или меньше суммы диаметра описанного круга и радиуса вписанного.

340. Доказать, что если длины сторон треугольника связаны неравенством  $a^2 + b^2 > 5c^2$ , то  $c$  — наименьшая сторона.

341. В треугольнике  $ABC$  угол  $B$  средний по величине:  $\angle A < \angle B < \angle C$ ,  $I$  — центр вписанной окружности,  $O$  — центр описанной окружности,  $H$  — точка пересечения высот. Доказать, что  $I$  лежит внутри треугольника  $BOH$ .

342. Треугольники  $ABC$  и  $AMC$  расположены так, что  $MC$  пересекает  $AB$  в точке  $O$ , причем  $|AM| + |MC| = |AB| + |BC|$ . Доказать, что если  $|AB| = |BC|$ , то  $|OB| > |OM|$ .

343. В треугольнике  $ABC$  точка  $M$  лежит на стороне  $BC$ . Доказать, что  $(|AM| - |AC|)|BC| \leq (|AB| - |AC|)|MC|$ .

344. Пусть  $a, b, c$  — стороны треугольника  $ABC$ ,  $M$  — произвольная точка плоскости. Найти минимум выражения  $|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2$ .

345. Стороны угла, равного  $\alpha$ , являются бортами бильярда. Какое наибольшее число отражений от бортов может сделать бильярдный шар (размерами шара можно пренебречь)?

346. Четыре деревни расположены в вершинах квадрата со стороной 2 км. Деревни соединены дорогами таким образом, что из каждой можно пройти в любую другую. Может ли общая длина дорог быть меньше 5,5 км?

347. Точка  $A$  расположена между двумя параллельными прямыми на расстоянии  $a$  и  $b$  от них. Эта точка служит вершиной угла, равного  $\alpha$ , всевозможных треугольников, две другие вершины которых лежат по одной на данных прямых. Найти наименьшее значение площади таких треугольников.

348. Дана окружность радиуса  $R$  с центром в точке  $O$ ,  $AB$  — ее диаметр, точка  $M$  находится на радиусе  $OA$ , причем  $|AM| : |MO| = k$ . Через точку  $M$  проведена произвольная хорда  $CD$ . Чему равно наибольшее значение площади четырехугольника  $ACBD$ ?

349. Дан угол с вершиной  $A$  и две точки  $M$  и  $N$  внутри него. Через  $M$  проводится прямая, пересекающая стороны угла в точках  $B$  и  $C$ . Доказать, что для того чтобы площадь четырехугольника  $ABNC$  была наименьшей, необходимо и доста-

точно, чтобы прямая  $BC$  пересекала  $AN$  в такой точке  $P$ , что  $|BP| = |MC|$ . Дать способ построения этой прямой.

**350.** Вершина угла  $\alpha$  находится в точке  $O$ ,  $A$  — фиксированная точка внутри угла. На сторонах угла взяты точки  $M$  и  $N$  так, что  $\angle MAN = \beta$  ( $\alpha + \beta < \pi$ ). Доказать, что если  $|AM| = |AN|$ , то площадь четырехугольника  $OMAN$  достигает максимума (среди всевозможных четырехугольников, получающихся при изменении  $M$  и  $N$ ).

**351.** Учитывая результат предыдущей задачи, решить следующую. Внутри угла с вершиной  $O$  взята точка  $A$ . Прямая  $OA$  образует со сторонами угла углы  $\varphi$  и  $\psi$ . Найти на сторонах угла точки  $M$  и  $N$  такие, что  $\angle MAN = \beta$  ( $\varphi + \psi + \beta < \pi$ ) и площадь четырехугольника  $OMAN$  максимальна.

**352.** Дан треугольник  $OBC$  ( $\angle BOC = \alpha$ ). Для каждой точки  $A$  на стороне  $BC$  определим точки  $M$  и  $N$  на  $OB$  и  $OC$  так, что  $\angle MAN = \beta$  ( $\alpha + \beta < \pi$ ) и площадь четырехугольника  $OMAN$  была бы максимальной. Доказать, что эта максимальная площадь достигает минимума для таких точек  $A$ ,  $M$  и  $N$ , для которых  $|MA| = |AN|$ , а прямая  $MN$  параллельна  $BC$ . (Такие точки найдутся, если углы  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  не превосходят  $\frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2}$ .)

**353.** Пусть  $ABCD$  — вписанный четырехугольник. Диагональ  $AC$  равна  $a$  и образует углы  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно со сторонами  $AB$  и  $AD$ . Доказать, что площадь четырехугольника заключена между величинами  $\frac{a^2 \sin(\alpha + \beta) \sin \beta}{2 \sin \alpha}$  и  $\frac{a^2 \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha}{2 \sin \beta}$ .

**354.** Дан угол  $\alpha$  с вершиной в точке  $O$  и точка  $A$  внутри него. Рассмотрим всевозможные четырехугольники  $OMAN$ , у которых вершины  $M$  и  $N$  расположены на сторонах угла и такие, что  $\angle MAN = \beta$  ( $\alpha + \beta > \pi$ ). Доказать, что если среди этих четырехугольников найдется такой выпуклый четырехугольник, что  $|MA| = |AN|$ , то этот четырехугольник имеет наименьшую площадь среди всех рассматриваемых четырехугольников.

**355.** Внутри угла с вершиной  $O$  дана точка  $A$  такая, что  $OA$  образует углы  $\varphi$  и  $\psi$  со сторонами данного угла. Найти на сторонах угла точки  $M$  и  $N$  такие, что  $\angle MAN = \beta$  ( $\varphi + \psi + \beta > \pi$ ) и площадь четырехугольника  $OMAN$  минимальна.

**356.** Дан треугольник  $OBC$ ,  $\angle BOC = \alpha$ ; для каждой точки  $A$  на стороне  $BC$  определим точки  $M$  и  $N$  соответственно на  $OB$  и  $OC$  так, что  $\angle MAN = \beta$  и площадь четырехугольника  $OMAN$  была минимальной. Доказать, что эта минимальная площадь будет максимальной для таких точек  $A$ ,  $M$  и  $N$ , для которых  $|MA| = |AN|$  и прямая  $MN$  параллельна  $BC$ . (Если

такой точки  $A$  нет, то максимум будет достигаться в конце стороны  $BC$  для вырожденного четырехугольника.)

**357.** Найти радиус наибольшего круга, который можно покрыть тремя кругами радиуса  $R$ . Решить задачу в общем случае, когда радиусы равны  $R_1, R_2, R_3$ .

**358.** Можно ли покрыть тремя единичными квадратами квадрат со стороной  $5/4$ ?

**359.** Чему равна наибольшая площадь правильного треугольника, который можно покрыть тремя правильными треугольниками со стороной 1?

**360.** В треугольнике  $ABC$  на сторонах  $AC$  и  $BC$  взяты точки  $M$  и  $N$ , а на отрезке  $MN$  — точка  $L$ . Пусть площади треугольников  $ABC, AML$  и  $BNL$  соответственно равны  $S, P$  и  $Q$ . Доказать, что  $\sqrt[3]{S} \geq \sqrt[3]{P} + \sqrt[3]{Q}$ .

**361.** Пусть  $a, b, c, S$  — соответственно стороны и площадь некоторого треугольника,  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы другого треугольника. Доказать, что  $a^2 \operatorname{ctg} \alpha + b^2 \operatorname{ctg} \beta + c^2 \operatorname{ctg} \gamma \geq 4S$ , причем равенство имеет место лишь в случае, когда оба треугольника подобны.

**362.** Доказать неравенство  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ , где  $a, b, c, S$  — соответственно стороны и площадь треугольника (Финслер, Хадвигер).

**363.** Дан треугольник со сторонами  $a, b$  и  $c$ . Определить площадь наибольшего правильного треугольника, описанного около данного, и площадь наименьшего правильного треугольника, в него вписанного.

**364.** Пусть  $M$  — произвольная точка внутри треугольника  $ABC$ . Прямая  $AM$  пересекает окружность, описанную около  $ABC$  в точке  $A_1$ . Доказать, что  $\frac{|BM| \cdot |CM|}{|A_1M|} \geq 2r$ , где  $r$  — радиус вписанной окружности, причем равенство достигается, когда  $M$  совпадает с центром вписанной окружности.

**365.** Пусть  $M$  — произвольная точка внутри треугольника  $ABC$ . Доказать, что  $|AM| \sin \angle BMC + |BM| \sin \angle AMC + |CM| \sin \angle AMB \leq p$  ( $p$  — полупериметр треугольника  $ABC$ ) и равенство достигается, когда  $M$  совпадает с центром вписанной окружности.

**366.** Пусть  $h_1, h_2, h_3$  — высоты треугольника  $ABC$ , а  $u, v, w$  — расстояния до соответствующих сторон от точки  $M$ , находящейся внутри треугольника  $ABC$ . Доказать неравенства:

$$\text{а) } \frac{h_1}{u} + \frac{h_2}{v} + \frac{h_3}{w} \geq 9;$$

$$\text{б) } h_1 h_2 h_3 \geq 27uvw;$$

$$\text{в) } (h_1 - u)(h_2 - v)(h_3 - w) \geq 8uvw.$$

367. Пусть  $h$  — длина наибольшей высоты нетупоугольного треугольника,  $R$  и  $r$  — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей. Доказать, что  $R + r \leq h$  (Эрдеш).

368. Доказать, что радиус окружности, описанной около треугольника, составленного из медиан остроугольного треугольника, больше  $5/6$  радиуса окружности, описанной около исходного треугольника.

369. Доказать, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до сторон треугольника принимает наименьшее значение для такой точки внутри треугольника, для которой расстояния до соответствующих сторон пропорциональны этим сторонам. Доказать также, что эта точка является точкой пересечения симедиан (см. задачу П.171) данного треугольника (точка Лемуана).

370. Дан треугольник, все углы которого меньше  $120^\circ$ . Доказать, что сумма расстояний от произвольной точки до вершин этого треугольника принимает наименьшее значение для такой точки внутри него, из которой каждая сторона треугольника видна под углом  $120^\circ$  (точка Торичелли).

371. Доказать, что среди всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, наименьший периметр имеет тот, вершинами которого являются основания высот данного треугольника.

372. Доказать, что сумма расстояний от точки внутри треугольника до его вершин не меньше, чем  $6r$ , где  $r$  — радиус вписанной окружности (Шрейбер).

373. Для произвольного треугольника доказать неравенство (обозначения обычные)  $\frac{bc \cos A}{b+c} + a < p < \frac{bc + a^2}{a}$ .

374. Пусть  $K$  — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника  $ABCD$ ,  $L$  — точка на стороне  $AD$ ,  $N$  — на стороне  $BC$ ,  $M$  — на диагонали  $AC$ , причем  $KL$  и  $MN$  параллельны  $AB$ ,  $LM$  параллельна  $DC$ . Доказать, что  $KLMN$  — параллелограмм и его площадь меньше  $8/27$  площади четырехугольника  $ABCD$  (Хаттори).

375. Два треугольника имеют общую сторону. Доказать, что расстояние между центрами вписанных в них окружностей меньше, чем расстояние между несовпадающими вершинами (Залгаллер).

376. Дан треугольник  $ABC$ , углы которого равны  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Треугольник  $DEF$  описан около треугольника  $ABC$  так, что вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  находятся соответственно на сторонах  $EF$ ,  $FD$  и  $DE$ , причем  $\angle ECA = \angle DBC = \angle FAB = \varphi$ . Определить значение угла  $\varphi$ , при котором площадь треугольника  $EFD$  достигает наибольшего значения.

**377.** На сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  взяты соответственно точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ . Доказать, что площадь треугольника  $A_1B_1C_1$  не меньше, чем площадь хотя бы одного из трех треугольников:  $AB_1C_1$ ,  $A_1BC_1$ ,  $A_1B_1C$ .

**378.** Пусть  $O$ ,  $I$ ,  $H$  — соответственно центры описанной, вписанной окружностей и точка пересечения высот некоторого треугольника. Доказать, что  $|OH| \geq |IH|/\sqrt{2}$ .

**379.** Пусть  $M$  — произвольная точка внутри треугольника  $ABC$ ;  $x$ ,  $y$  и  $z$  — расстояния от  $M$  соответственно до  $A$ ,  $B$  и  $C$ ;  $u$ ,  $v$  и  $w$  — расстояния от  $M$  соответственно до сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ ;  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — соответствующие стороны треугольника  $ABC$ ;  $S$  — его площадь;  $R$  и  $r$  — радиусы описанной и вписанной окружностей. Доказать неравенства:

а)  $ax + by + cz \geq 4S$ ;

б)  $x + y + z \geq 2(u + v + w)$  (Эрдеши);

в)  $xu + yv + zw \geq 2(uv + vw + wu)$ ;

г)  $2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \leq \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}$ ;

д)  $xyz \geq \frac{R}{2r}(u+v)(v+w)(w+u)$ ;

е)  $xyz \geq \frac{4R}{r}uvw$ ;

ж)  $xy + yz + zx \geq \frac{2R}{r}(uv + vw + wu)$ .

**380.** В данном треугольнике проведем медиану к большей стороне. Эта медиана разбивает треугольник на два. В каждом из получившихся треугольников также проведем медиану к большей стороне и т. д. Доказать, что все получающиеся треугольники можно разбить на конечное число классов таким образом, что все треугольники, принадлежащие одному классу, подобны между собой. Доказать также, что любой угол любого получающегося при этом треугольника не меньше половины наименьшего угла исходного треугольника.

**381.** Найти треугольник наименьшей площади, которым можно покрыть любой треугольник со сторонами, не превосходящими 1.

## I. Основные геометрические факты и теоремы. Задачи на вычисление

17. Биссектриса разбивает треугольник на два, площади которых соответственно  $\frac{al}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$ ,  $\frac{bl}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$ , а площадь всего тре-

угольника  $\frac{ab}{2} \sin \alpha$ ; значит,  $\left(\frac{al}{2} + \frac{bl}{2}\right) \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{ab}{2} \sin \alpha$ ,  $l = \frac{2ab \cos \frac{\alpha}{2}}{a+b}$ .

19. Возьмем окружность, касающуюся сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$ . Если эта окружность не касается стороны  $DA$ , то, проведя касательную  $DA_1$  ( $A_1$  — на  $AB$ ), получим  $\triangle DAA_1$ , у которого одна сторона равна сумме двух других.

20. Проведя через вершины треугольника прямые, параллельные противоположным сторонам, получим треугольник, для которого высоты исходного треугольника являются перпендикулярами, восстановленными к сторонам в их серединах.

$$\begin{array}{lll} 21. \frac{a+b}{2}. & 22. \frac{c}{2} \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}}. & 23. \frac{\sqrt{2}-1}{2}(a+b-\sqrt{a^2+b^2}). \\ 24. \frac{m^2\sqrt{3}}{2}. & 25. \frac{c+q}{b}. & 28. \frac{|a-b|}{2}. \quad 29. \frac{1}{2}(a-b)^2 \sin \alpha. \quad 30. \frac{h}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi-\alpha}{4}. \\ 31. 30^\circ. & 32. \frac{ab}{2}. & 33. 90^\circ. \quad 36. r^2(2\sqrt{3}+3). \quad 37. l\sqrt{a(2l-a)}. \quad 38. \frac{1}{2}(S_1+S_2). \end{array}$$

39. Если  $a > b$ , то биссектриса пересекает боковую сторону  $CD$ ; если  $a < b$ , то — основание  $BC$ .

$$\begin{array}{lll} 40. \frac{2ab}{a+b}. & 41. \arccos \frac{1-k}{1+k}. & 42. \frac{a+b}{4} \sqrt{3b^2+2ab-a^2}. \quad 43. a^2. \quad 44. \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{2}}. & 45. (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2. & 46. 90^\circ + \frac{\alpha}{2}. \quad 47. \frac{|a-b|}{a+b} \sqrt{a^2+b^2}. \\ 48. \arcsin \left( \frac{b}{a} - 1 \right). & 49. (6-\pi):2\pi:(6-\pi). & 50. \frac{a^2}{8} (\sqrt{2}-1) [(2\sqrt{2}- \\ -1)\pi-4]. & 51. \frac{a^2}{4} (6\sqrt{3}-6-\pi). & 52. \frac{R^2}{2} \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right). \quad 53. \frac{1}{2} \sqrt{b^2-a^2}. \\ 54. \frac{d}{3}. & 55. \frac{4}{9} S. & \end{array}$$

58. Если  $\alpha < 90^\circ$ ,  $\beta < 90^\circ$ , то углы  $\triangle ABC$  равны  $90^\circ - \alpha$ ,  $90^\circ - \beta$ ,  $\alpha + \beta$ ; если  $\alpha > 90^\circ$ ,  $\beta < 90^\circ$ , то  $\alpha - 90^\circ$ ,  $90^\circ + \beta$ ,  $180^\circ - \alpha - \beta$ ; если  $\alpha < 90^\circ$ ,  $\beta > 90^\circ$ , то  $90^\circ + \alpha$ ,  $\beta - 90^\circ$ ,  $180^\circ - \alpha - \beta$ .

$$59. \frac{1}{2} \sqrt{m^2 - 4S}. \quad 60. \frac{a}{5}. \quad 61. \frac{36}{25} h^2. \quad 62. \sqrt{\frac{S}{\pi(4\pi^2 - 1)}}.$$

63. В равнобедренном треугольнике с углом при вершине  $\pi/5$  биссектриса угла при основании делит треугольник на два равнобедренных треугольника, один из которых подобен исходному. Ответ:

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} R.$$

$$64. R^2 \left[ \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} (\pi - \alpha) \right]. \quad 65. \frac{a}{4} \sqrt{10}. \quad 66. \frac{a(4\sin^2 \alpha + 1)}{8 \sin \alpha}.$$

$$67. 2r^2(2\sqrt{3} + 3). \quad 68. \frac{a^2 + 4r^2}{4r}. \quad 69. \frac{3a}{2(5 + \sqrt{13})}. \quad 70. \frac{a\sqrt{10}}{4}. \quad 71. 2.$$

$$72. \frac{a^3 b}{4(a^2 + b^2)}. \quad 73. \frac{a}{2} \left( \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg} \alpha \right). \quad 74. \frac{a \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad 75. \frac{R^2 - a^2}{2R}.$$

$$76. \frac{a\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}. \quad 77. a \left( \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \right). \quad 78. \frac{a^2 \sqrt{3}}{12}. \quad 79. \frac{1}{2} (\beta + \gamma - \alpha). \quad 80. \frac{ac + bd}{a}.$$

$$81. \frac{\pi}{2 \sin^2 \alpha \sin 2\beta}. \quad 82. \frac{|b - a|}{4} \sqrt{4d^2 - (b - a)^2}. \quad 83. 2(R^2 + a^2).$$

84. Возможны два случая: оба центра расположены по разные стороны от общей хорды и по одну. Соответственно две пары ответов:

$$a(\sqrt{3} - 1), a \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1) \text{ и } a(\sqrt{3} + 1), a \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + 1).$$

$$86. \frac{3 - \sqrt{7}}{4}. \quad 87. \sqrt{13}. \quad 88. \arccos \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2k}}{2}. \quad 89. \frac{2}{3}. \quad 90. \frac{3a^2}{8}.$$

$$91. \frac{\pi}{2}, \left| \alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{2} \right|, \frac{\pi}{2} - \left| \alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{2} \right|. \quad 92. a^2 \frac{2\sqrt{3} - 3}{8}. \quad (\text{Воз-}$$

можны, вообще говоря, два треугольника, но у одного из них две вершины лежат на продолжениях диагоналей.)

$$93. \frac{7\sqrt{2}}{10}. \quad 94. \frac{br}{c}. \quad 95. \sqrt{7}. \quad 96. \frac{R}{2}(\sqrt{3} - 1). \quad 97. \sqrt{10}. \quad 98. \frac{\sqrt{2}}{\cos \alpha} - 1.$$

$$100. \frac{1}{3} \sqrt{96 - 54\sqrt{3}}. \quad 101. 3:4. \quad 102. a \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

$$103. \frac{1}{10} \sqrt{25a^2 + c^2 + 10ac \cos \beta}. \quad 104. \frac{3}{4} S. \quad 105. \frac{4\sqrt{Rr(R - r)}}{6Rr - r^2 - R^2}.$$

$$106. \frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}{2(b - a \cos \alpha)}. \quad 107. \frac{3}{10} c. \quad 108. \frac{\sqrt{b^2 + a^2 + 2ab \sin \frac{\alpha}{2}}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

109.  $S \cos^2 \alpha$ . 110.  $\sqrt{4R^2 - a^2}$ . 111.  $\frac{b}{2}$ . 112.  $\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha} \cdot |\operatorname{ctg} \alpha|$ .
113.  $\sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{4}{9}a^2 - \frac{2}{3}ab \cos \alpha}$ . 114.  $\arcsin \frac{2}{\pi}$  и  $\pi - \arcsin \frac{2}{\pi}$ .
115.  $a^2(\sqrt{2} - 1)$ . 116.  $\frac{a \cos(\alpha + \beta)}{\cos(2\alpha + \beta)}$ ,  $\frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\cos(2\alpha + \beta)}$ . 117.  $\frac{1}{2}a(b -$   
 $- a \cos \alpha) \sin^3 \alpha$ . 118.  $\frac{2 \cos \frac{\alpha}{3} + 3}{6 \cos \frac{\alpha}{3} + 1}$ . 119.  $\frac{2\sqrt{S_2(S_1 + S_2)}}{\sqrt[4]{4S_1^2 - S_2^2}}$ .
120.  $4 \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{(R_2 - R_1) \left( R_2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + R_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)}$ . 121.  $\frac{150}{7}$ .
122.  $\sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}}}$ . 123.  $\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$ ,  $\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$ .
125.  $15^\circ$ ,  $75^\circ$ . 126.  $\frac{R\sqrt{3}}{8}$ . 127.  $2\sqrt{6}$ . 128.  $\sqrt{2}$ . 129.  $\frac{4}{3}(2\sqrt{3} + 3)$ .
130.  $\frac{2R^2 \sin^3 \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ . 131.  $\frac{3\sqrt{3}(\sqrt{13} - 1)}{32\pi}$ . 132. 1,1. 133.  $\frac{a^2}{16R}$ . 134.  $\frac{\pi}{2}$   
и  $\arccos \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2}$ . 135.  $30^\circ$ . 136.  $\frac{a\sqrt{7}}{4}$ . 137.  $\frac{R(3 - 2\sqrt{2})}{3}$ .
138.  $4 \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{3 - \cos \beta}}$ . 139.  $\frac{ab \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + (a - b)^2}}$ . (В треугольнике  $ONP$  отрезки  $KP$  и  $NM$  являются высотами, поэтому  $OA$  — высота.)
140.  $\frac{2Rr}{R + r}$ . 141.  $\frac{a}{2}$ .
143. Погрешность не превосходит 0,00005 радиуса окружности.
144.  $2\sqrt{113 - 56\sqrt{3}}$ . 145. 7,5. 146.  $3\frac{1}{12}$ . 147.  $\frac{2\pi}{3}$ . 148.  $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2}$ .
149.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ . 150.  $4\sqrt{3}$ . 151.  $\frac{16}{9}(4 - \sqrt{7})$ . 152.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ . 153.  $2r^2 \sin^2 \alpha \sin 2\alpha$ .
154.  $2\frac{2}{3}$ . 155.  $\frac{5}{12}\pi + \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{3}{\pi} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . 156.  $\sqrt[4]{12}(2 - \sqrt{3})$ .
157.  $ar/(a + 2r)$ .
158. Если  $\alpha < \frac{\pi}{3}$ , то задача имеет два решения:  $R^2 \sin \alpha \left(1 \pm \pm \sin \frac{\alpha}{2}\right)$ ; если  $\frac{\pi}{3} \leq \alpha < \pi$  — одно:  $R^2 \sin \alpha \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)$ .
159. От  $\frac{c}{6}(3\sqrt{2} - 4)$  до  $\frac{c}{3}$ . 160. От  $\frac{|a^2 - b^2|}{a^2 + b^2}$  до 1.



161.  $\frac{2abc}{ab+bc+ca}$ . (Докажите, что если через точку внутри тре-

угольника проведены прямые, параллельные его сторонам, то сумма коэффициентов подобия отсекаемых треугольников по отношению к данному треугольнику равна 2.)

162.  $\frac{Rr}{R+r}$ .

163. Возьмем на прямой  $BA$  точку  $A_1$  так, что  $|A_1B| = |A_1C|$ . Точки  $A_1, A, D$  и  $C$  лежат на одной окружности ( $\angle DA_1C = 90^\circ - \angle ABC = \angle DAC$ ). Следовательно,  $\angle A_1AC = \angle A_1DC = 90^\circ$ , а значит, и  $\angle BAC = 90^\circ$ .

164. 1. 165.  $2\frac{1}{4}$ . 166.  $\frac{13}{15}a$ . 167.  $\frac{a^2 + a\sqrt{a^2 + 8b^2}}{4}$ .

168.  $\frac{a^2 + a(d-b)}{a-b}$ . 169. 6. 170. 3.

171. Если  $Q \geq \frac{1}{4}S$ , то искомое расстояние будет  $\frac{\sqrt[4]{3}}{3}(\sqrt{S} - \sqrt{Q})$ .

Если же  $Q < \frac{1}{4}S$ , то возможны два ответа:  $\frac{\sqrt[4]{3}}{3}(\sqrt{S} \pm \sqrt{Q})$ .

172.  $3r^2 \frac{|1-k^2|}{1+k^2}$ . 173.  $\frac{2\left(1 + \cos \frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}$ . 174.  $\frac{(a^2 + b^2 - c^2)c}{4ab}$ .

175. Пусть  $A$  и  $B$  — две соседние вершины ромба,  $M$  — точка пересечения диагоналей,  $O_1$  и  $O_2$  — центры окружностей ( $O_1$  — на  $AM$ ,  $O_2$  — на  $BM$ ). Имеем:  $|AB|^2 = |AM|^2 + |BM|^2 = (|O_2A|^2 - |O_2M|^2) + (|O_1B|^2 - |O_1M|^2) = R^2 + r^2 - (|O_1M|^2 + |O_2M|^2) = R^2 + r^2 - a^2$ .

О т в е т:  $\sqrt{R^2 + r^2 - a^2}$ .

176.  $\frac{8R^3r^3}{(R^2 + r^2)^2}$ .

177.  $|AB| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}}{\sin \alpha}$ , если  $B$  лежит внутри данного

угла или вертикального к нему;  $|AB| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}{\sin \alpha}$

в остальных случаях.

178.  $2 \arcsin \frac{h_a h_b}{l(h_a + h_b)}$ . 179.  $\frac{3\sqrt{3}}{5\pi - 3}$ .

180. Поскольку  $EF$  перпендикулярна  $CO$  ( $O$  — точка пересечения диагоналей), а из условия следует, что  $AC$  — биссектриса угла  $A$ , равного  $60^\circ$ ,  $|AE| = |AF| = |EF|$ . Если  $K$  — середина  $EF$ , то  $|AO| = 2a\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $|CO| = a\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $|CK| \cdot |OK| = |EK|^2 = \frac{1}{3}|AK|^2$ . О т в е т:

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$  и  $2a^2\sqrt{3}$ .

$$181. \frac{3}{4}h.$$

$$182. \text{ Обозначим } \angle BAC = \angle BDC = \alpha, \quad \angle CBA = \angle BCD = \beta, \\ \angle BAM = \varphi. \quad \text{Тогда} \quad \frac{|BM| + |MC|}{|AM| + |MD|} = \frac{\sin \varphi + \sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\beta + \alpha - \varphi) + \sin(\beta + \varphi)} = \\ = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right)}{\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right)} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\beta + \alpha) + \sin \beta} = \frac{c}{a + b}.$$

183. Всегда имеется хорда, параллельная основанию треугольника, делящаяся боковыми сторонами на три равные части (безусловно,  $0 < a < 2$ ). Ее длина  $\frac{3a}{2a^2 + 1}$ . Кроме того, если  $a < 1/\sqrt{2}$ , то существует еще одна хорда, не параллельная основанию, обладающая тем же свойством. Длина этой хорды  $3/\sqrt{9 - 2a^2}$ .

184. Пусть  $BC$  и  $AC$  пересекают  $MN$  в точках  $P$  и  $Q$ . Обозначим:  $\frac{|MC|}{|CN|} = x$ . Тогда  $\frac{|MP|}{|PN|} = \frac{S_{BMC}}{S_{BNC}} = \frac{|MB| \cdot |MC|}{|BN| \cdot |CN|} = \frac{3x}{4}$ . Значит,  $|MP| = \frac{3x}{3x + 4}$ . Аналогично  $|MQ| = \frac{x}{x + 1}$ . Для  $x$  получаем уравнение  $\frac{x}{x + 1} - \frac{3x}{3x + 4} = a$ ,  $3ax^2 + (7a - 1)x + 4a = 0$ . Поскольку  $D \geq 0$  и  $0 < a < 1$ , то наибольшее значение  $a$  равно  $7 - 4\sqrt{3}$ .

185. Из равенства  $S_{ABN} = S_{CDM}$  следует, что  $S_{MBN} = S_{MCN}$ , так как  $MN$  — медиана треугольников  $ABN$  и  $CDM$ . Значит,  $BC \parallel MN$ , точно так же  $AD \parallel MN$ , т. е.  $ABCD$  — трапеция, в которой  $AD$  и  $BC$

основания. Ответ:  $\frac{5k - 2 \pm 2\sqrt{2k(2k - 1)}}{2 - 3k}$ .

186. Имеем:  $|AD| \geq |DM| - |AM| = 2$ . С другой стороны,  $|AD| \leq \frac{|BD|}{\sin 60^\circ} = 2$ . Следовательно,  $|AD| = 2$ ,  $AD$  — большее основание и точка  $M$  лежит на прямой  $AD$ . Ответ:  $\sqrt{7}$ .

187. Пусть  $BD$  — биссектриса в треугольнике  $ABC$ ,  $A_1$  и  $C_1$  — середины  $BC$  и  $AB$ ,  $|DA_1| = |DC_1|$ . Возможны два случая: 1)  $\angle BA_1D = \angle BC_1D$  и 2)  $\angle BA_1D + \angle BC_1D = 180^\circ$ . В первом случае  $|AB| = |BC|$ . Во втором случае повернем треугольник  $AC_1D$  вокруг  $D$  на угол  $C_1DA_1$  так, чтобы  $C_1$  перешла в  $A_1$ . Получим треугольник

со сторонами  $\frac{ba}{a + c}$ ,  $\frac{a + c}{2}$ ,  $\frac{bc}{a + c}$  ( $a$ ,  $b$  и  $c$  — стороны  $\triangle ABC$ ), подобный треугольнику  $ABC$ . Следовательно,  $\frac{ba}{a + c} : a = \frac{a + c}{2} : b = \frac{bc}{a + c} : c$ , откуда  $a + c = b\sqrt{2}$ . Поскольку  $a \neq c$ , то хотя бы одно из

двух неравенств  $b \neq a$ ,  $b \neq c$  — верно. Пусть  $b \neq c$ , тогда  $b + c = a\sqrt{2}$ ,  $b = a$ , и мы получаем треугольник со сторонами  $a$ ,  $a$ ,  $a(\sqrt{2} - 1)$ ,

обладающий данным свойством. Таким образом, с точностью до подобия существуют два треугольника, удовлетворяющих условию задачи: правильный и треугольник со сторонами 1, 1,  $\sqrt{2} - 1$ .

**188.** Если  $\alpha$  — угол между сторонами  $a$  и  $b$ , то из условия следует:  $a + b \sin \alpha \leq b + a \sin \alpha$ ,  $(a - b)(\sin \alpha - 1) \geq 1$ ,  $\sin \alpha \geq 1$ . Отсюда  $\alpha = 90^\circ$ .

Ответ:  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .

**189.** Докажите, что из всех четырехугольников, описанных около данной окружности, наименьшую площадь имеет квадрат. (Можно воспользоваться, например, неравенством  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta \geq 2 \operatorname{tg} [(\alpha + \beta)/2]$ , где  $\alpha, \beta$  — острые углы.) С другой стороны,  $S_{ABCD} \leq$

$$\leq \frac{1}{2}(|MA| \cdot |MB| + |MB| \cdot |MC| + |MC| \cdot |MD| + |MD| \cdot |MA|) \leq$$

$$\leq \frac{1}{4}(|MA|^2 + |MB|^2) + \frac{1}{4}(|MB|^2 + |MC|^2) + \frac{1}{4}(|MC|^2 + |MD|^2) +$$

$$+ \frac{1}{4}(|MD|^2 + |MA|^2) = 1. \text{ Следовательно, } ABCD - \text{квадрат площади } 1.$$

**190.** Обозначим:  $|BM| = x$ ,  $|DM| = y$ ,  $|AM| = l$ ,  $\angle AMB = \varphi$ . Предположим, что  $M$  лежит на отрезке  $BD$ . Запишем для треугольников  $AMB$  и  $AMD$  теорему косинусов, исключим  $\cos \varphi$ , получим:  $l^2(x + y) + xy(x + y) = a^2y + d^2x$ . Аналогично получается соотношение  $l^2(x + y) + xy(x + y) = b^2y + c^2x$ . Таким образом,  $(a^2 - b^2)y = (c^2 - d^2)x$ .

Ответ:  $\left| \frac{a^2 - b^2}{c^2 - d^2} \right|$ .

**191.** Если вершины прямоугольника лежат на концентрических окружностях (две противоположные на окружностях радиусов  $R_1$  и  $R_2$ , а две оставшиеся на окружностях радиусов  $R_3$  и  $R_4$ ), то должно выполняться равенство:  $R_1^2 + R_2^2 = R_3^2 + R_4^2$ . Докажем это. Пусть  $A$  — центр окружностей, вершины  $K$  и  $M$  прямоугольника  $KLMN$  лежат на окружностях радиусов  $R_1$  и  $R_2$ , а  $L$  и  $N$  — на окружностях радиусов  $R_3$  и  $R_4$ . В треугольниках  $AKM$  и  $ALN$  медианы, выходящие из вершины  $A$ , равны, равны также стороны  $KM$  и  $LN$ . Из этого следует справедливость нашего утверждения.

Пусть вторая сторона прямоугольника равна  $x$ ,  $x > 1$ . Радиусы  $R_1, R_2, R_3, R_4$  в некотором порядке равны числам 1,  $x, \sqrt{x^2 + 1}, \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 1}$ . Проверяя различные возможности, найдем:  $x^2 = 7$ ,  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2\sqrt{2}$ ,  $R_3 = \sqrt{2}$ ,  $R_4 = \sqrt{7}$ .

Рассмотрим квадрат  $K_1L_1M_1N_1$  со стороной  $y$ , вершины которого лежат соответственно на окружностях радиусов  $R_1 = 1$ ,  $R_3 = \sqrt{2}$ ,  $R_2 = 2\sqrt{2}$ ,  $R_4 = \sqrt{7}$ . Обозначим:  $\angle AK_1L_1 = \varphi$ , тогда  $\angle AK_1N_1 = 90^\circ \pm \varphi$  или  $\varphi \pm 90^\circ$ . Записывая теорему косинусов для треугольников  $AK_1L_1$  и  $AK_1N_1$ , получим:

$$\begin{cases} 1 + x^2 - 2x \cos \varphi = 2, \\ 1 + x^2 \pm 2x \sin \varphi = 7, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \cos \varphi = x^2 - 1, \\ \pm 2x \sin \varphi = x^2 - 6. \end{cases}$$

Возводя последние два равенства в квадрат и складывая их, получим:  
 $2x^4 - 10x^2 + 37 = 0$ ,  $x^2 = 5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{26}$ . Ответ:  $\sqrt{5 \pm 2\sqrt{26}}$ .

**192.** Докажем сначала следующее утверждение. Если перпендикуляры, восстановленные к  $AB$  и  $BC$  в их серединах, пересекают  $AC$  в точках  $M$  и  $N$  так, что  $|MN| = \lambda |AC|$ , то либо  $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} C = 1 - 2\lambda$ , либо  $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} C = 1 + 2\lambda$ . Обозначим:  $|AB| = c$ ,  $|BC| = a$ ,  $|AC| = b$ . Если отрезки перпендикуляров от середин сторон до точек  $M$  и  $N$  не пересекаются, то

$$\begin{aligned} |MN| &= b - \frac{c}{2 \cos A} - \frac{a}{2 \cos C} = \lambda b \Rightarrow 2(1 - \lambda) \sin B \cos A \cos C = \\ &= \frac{1}{2} (\sin 2C + \sin 2A) \Rightarrow 2(1 - \lambda) \sin(A + C) \cos A \cos C = \\ &= \sin(A + C) \cos(A - C) \Rightarrow 2(1 - \lambda) \cos A \cos C = \\ &= \cos A \cos C + \sin A \sin C \Rightarrow \operatorname{tg} A \cos C = 1 - 2\lambda. \end{aligned}$$

Если же эти отрезки пересекаются, то  $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} C = 1 + 2\lambda$ . В нашем случае  $\lambda = 1$ , т. е. либо  $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} C = -1$ , либо  $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} C = 3$ . Для углов  $B$  и  $C$  получим ( $\lambda = 1/2$ )  $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 0$  (это невозможно) или  $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 2$ . Система

$$\begin{cases} \operatorname{tg} A \operatorname{tg} C = -1, \\ \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 2, \\ A + B + C = \pi \end{cases}$$

не имеет решения. Значит,  $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} C = 3$ . Решив соответствующую систему, найдем  $\operatorname{tg} A = 3$ ,  $\operatorname{tg} B = 2$ ,  $\operatorname{tg} C = 1$ . Ответ:  $\pi/4$ .

**193.** Обозначим:  $R$  — радиус описанной около  $ABC$  окружности,  $O$  — ее центр,  $N$  — точка пересечения медиан  $\triangle BCM$ . Перпендикулярность  $ON$  и  $CM$  равносильна равенству  $|CN|^2 - |MN|^2 = |CO|^2 - |OM|^2$ . Пусть  $|AB| = 1$ ,  $|MB| = x$ ,  $|CM| = y$ , тогда  $|MN|^2 = \frac{1}{9}(2y^2 + 2x^2 - k^2)$ ,  $|CN|^2 = \frac{1}{9}(2y^2 + 2k^2 - x^2)$ ,  $|CO|^2 = R^2$ ,  $|OM|^2 = R^2 \cos^2 C + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ . Получаем для  $x$  уравнение:  $2x^2 - 3x + k^2 = 0$ .

Ответ:  $\frac{3 \pm \sqrt{9 - 8k^2}}{4}$  (если  $1 < k < \frac{3\sqrt{2}}{4}$ , то обе точки находятся внутри отрезка  $AB$ ).

**194.** Если  $O$  — середина  $AC$ , то  $|AB|^2 = |BO|^2 + |AO|^2 = |BK|^2 - |KO|^2 + |AO|^2 = |BK|^2 + (|AO| - |AK|)(|AO| + |AK|) = |BK|^2 + |AK| \cdot |CK| = b^2 + bd$ . Ответ:  $\sqrt{b^2 + bd}$ .

**195.** 1) Ломаная из трех звеньев по длине равна отрезку, соединяющему ее концы. Это возможно лишь тогда, когда все ее вершины лежат на этом отрезке.  $x = \frac{2ab}{a + b\sqrt{3}}$ ,  $y = \frac{2ab}{a\sqrt{3} + b}$ .

2)  $x$ ,  $y$ ,  $z$  являются сторонами треугольника, высоты которого равны  $a$ ,  $b$  и  $c$ , причем этот треугольник не должен быть тупо-

угольным. Для нахождения  $x, y, z$  воспользуемся тем, что треугольник, стороны которого обратно пропорциональны высотам данного, подобен данному треугольнику.  $x = \frac{1}{2as}$ ,  $y = \frac{1}{2bs}$ ,  $z = \frac{1}{2cs}$ , где  $s =$

$$= \sqrt{p \left(p - \frac{1}{a}\right) \left(p - \frac{1}{b}\right) \left(p - \frac{1}{c}\right)}, \quad 2p = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \quad \text{Задача имеет решение, если } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{c^2}, \quad \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2}, \quad \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \geq \frac{1}{b^2}.$$

3) Рассмотрим в прямоугольной системе координат точки  $A(a, b)$ ,  $B(x, 0)$ ,  $C(0, y)$ . Из данной системы следует, что  $ABC$  — равносторонний треугольник. При повороте на угол  $60^\circ$  вокруг  $A$  в соответствующем направлении точка  $B$  переходит в  $C$ . Можно найти уравнение прямой, в которую перейдет ось  $x$ -ов при таком повороте. (В частности, угловой коэффициент равен  $\pm\sqrt{3}$ .) Ответ:  $x = -a \pm b\sqrt{3}$ ,  $y = -b \pm a\sqrt{3}$ .

4) Если  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ , то  $x, y, z$  являются расстояниями до вершин прямоугольного треугольника  $ABC$ , в котором катеты  $BC$  и  $CA$  равны  $a$  и  $b$ , от такой точки  $M$  внутри него, из которой все его стороны видны под углом  $120^\circ$ . Для определения суммы  $x + y + z$  повернем  $\triangle CMA$  вокруг  $C$  во внешнюю по отношению к  $\triangle ABC$  сторону на угол  $60^\circ$ .  $M$  и  $A$  перейдут при этом в  $M_1$  и  $A_1$ . Тогда  $BMM_1A_1$  — прямая и, следовательно,  $x + y + z = |BM| + |CM| + |AM| = |BA_1| = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}\sqrt{3}$ . Аналогично рассматриваются случаи, когда одна из переменных отрицательна (отрицательной, вообще говоря, может быть не любая из них), и др.

Ответ:  $\pm\sqrt{a^2 + b^2 \pm ab}\sqrt{3}$ .

196. Пусть  $x$  — расстояние от центра квадрата до прямой  $l$ ,  $\varphi$  — острый угол, образованный одной из диагоналей квадрата с  $l$ . Расстояния от вершин квадрата до  $l$  в порядке обхода равны  $x + a\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi$ ,  $x + a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi$ ,  $\left|x - a\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi\right|$ ,  $\left|x - a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi\right|$ . По условию  $\left|x^2 - \frac{a^2}{2}\sin^2\varphi\right| = \left|x^2 - \frac{a^2}{2}\cos^2\varphi\right|$ , откуда или  $\operatorname{tg}^2\varphi = 1$ , что невозможно по условию, или  $x^2 = a^2/4$ . Ответ:  $a/2$ .

197. Из условия  $\angle B = 2\angle C$  следует соотношение между сторонами треугольника:  $b^2 = c^2 + ac$ . Перебирая всевозможные варианты:  $b = 2c$ ,  $a = 2c$ ,  $b = 2a$ ,  $a = 2b$ , получим, что  $a = 2c$ , так как в других случаях не будет выполняться неравенство треугольника. Ответ:  $\angle C = \pi/6$ ,  $\angle B = \pi/3$ ,  $\angle A = \pi/2$ .

198. Пусть  $D$  — середина  $BC$ . Имеем:  $b^2 = |BM|^2 = (|BD| + |DN|)(|BD| - |DN|) = |BD|^2 - |DN|^2 = |AB|^2 - |AD|^2 - |DN|^2 = (a + b)^2 - |AD|^2 - |DN|^2$ . Отсюда  $|AN|^2 = |AD|^2 + |DN|^2 = (a + b)^2 - b^2 = a^2 + 2ab$ . Ответ:  $\sqrt{a^2 + 2ab}$ .

199. Возьмем на  $BC$  точку  $N$  так, что  $\triangle ABN$  подобен  $\triangle ADL$ . Тогда  $\angle NMA = \angle MAK + \angle KAD = \angle MAB + \angle DAL = \angle MAN$ . Следовательно,  $|MN| = |AN| = k|AL|$ . Ответ:  $\frac{a}{k} + b$ .

200.  $2\sqrt{pq}$ .

201. а)  $\frac{a}{R} \sqrt{(R \pm x)(R \pm y)}$ , « + » соответствует внешнему касанию окружностей, « - » — внутреннему. б)  $\frac{a}{R} \sqrt{(R + x)(R - y)}$ .

202. Пусть  $|AM| : |MC| = k$ . Условие равенства радиусов окружностей, вписанных в треугольники  $ABM$  и  $BCM$ , означает, что их площади относятся, как периметры. Отсюда, поскольку отношение площадей равно  $k$ , получим  $|BM| = \frac{13k - 12}{1 - k}$ . Из этого равенства, в частности, следует, что  $12/13 < k < 1$ . Записывая для треугольников  $ABM$  и  $BCM$  теоремы косинусов (относительно углов  $BMA$  и  $BMC$ ) и исключая из этих уравнений косинусы углов, получим для  $k$  квадратное уравнение с корнями  $2/3$  и  $22/23$ . Учитывая ограничения для  $k$ , получаем ответ:  $k = 22/23$ .

203. Пусть  $ABC$  — данный треугольник,  $O$ ,  $K$ ,  $H$  — соответственно центр описанной окружности, центр вписанной окружности и точка пересечения высот  $\triangle ABC$ . Воспользуемся следующим фактом: для произвольного треугольника биссектриса любого его угла образует равные углы с радиусом описанной окружности и высотой, выходящими из той же вершины (докажите). Из того, что окружность, проходящая через  $O$ ,  $K$  и  $H$ , содержит, по крайней мере, одну вершину  $\triangle ABC$  (пусть это будет вершина  $A$ ), следует, что  $|OK| = |KH|$ . Точка  $K$  находится внутри хотя бы одного из треугольников:  $OBH$ ,  $OCH$ . Пусть это  $\triangle OBH$ . Угол  $B$  не может быть тупым. В треугольниках  $OBK$  и  $HVK$  имеем:  $|OK| = |HK|$ ,  $KB$  — общая сторона,  $\angle OBK = \angle HBK$ . Значит,  $\triangle OBK = \triangle HBK$ , так как в противном случае  $\angle BOK + \angle BHK = 180^\circ$ , чего не может быть ( $K$  внутри  $\triangle OBH$ ). Следовательно,  $|BH| = |BO| = R$ . Расстояние от  $O$  до  $AC$  равно  $\frac{1}{2}|BH| = \frac{R}{2}$  (задача I.20), т. е.  $\angle B = 60^\circ$  ( $\angle B$  — острый),  $|AC| = R\sqrt{3}$ . Если теперь  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — точки касания вписанной окружности со сторонами  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ , то  $|BA_1| = |BC_1| = r\sqrt{3}$ ,  $|CA_1| + |AC_1| = |CB_1| + |B_1A| = |AC| = R\sqrt{3}$ . Периметр треугольника равен  $2\sqrt{3}(R + r)$ . Теперь легко найти его площадь. Ответ:  $\sqrt{3}(R + r)r$ .

204. Пусть  $P$  — проекция  $M$  на  $AB$ ,  $|AP| = a + x$ . Тогда  $|PB| = a - x$ ,  $|MP| = y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $|AN| = (a + x) \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2} + y}$ ,  $|NB| = 2a - (a + x) \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2} + y} = \frac{a\sqrt{2}(a - x + y\sqrt{2})}{a\sqrt{2} + y}$ ,  $|AL| = \frac{a\sqrt{2}(a + x + y\sqrt{2})}{a\sqrt{2} + y}$ .

Отсюда

$$\begin{aligned} |AL|^2 + |NB|^2 &= \frac{4a^2}{(a\sqrt{2} + y)^2} (a^2 + 2\sqrt{2}ay + 2y^2 + x^2) = \\ &= \frac{4a^2}{(a\sqrt{2} + y)^2} (a^2 + 2\sqrt{2}ay + 2y^2 + (a^2 - y^2)) = 4a^2. \end{aligned}$$

205. Пусть сторона треугольника  $x$  и стороны, выходящие из общей точки окружностей, образуют с прямой, проходящей через центры,

углы  $\alpha$  и  $\beta$ ;  $\alpha \pm \beta = 60^\circ$ , тогда  $\cos \alpha = \frac{x}{2R}$ ,  $\cos \beta = \frac{x}{2r}$  (или наоборот).

Найдя  $\sin \alpha$  и  $\sin \beta$  из уравнения  $\cos(\alpha \pm \beta) = \frac{1}{2}$ , получим, что сторона

правильного треугольника равна  $\frac{Rr\sqrt{3}}{\sqrt{R^2 + r^2 - Rr}}$ .

**206.** Проведем прямую  $BA$  и обозначим через  $D$  вторую точку пересечения с меньшей окружностью. Рассмотрим дуги  $AB$  и  $AD$  (меньшие, чем полуокружность). Поскольку общая касательная к окружностям в точке  $A$  образует с  $AB$  и  $AD$  равные углы, то и центральные углы, соответствующие этим дугам, равны. Следовательно,

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{r}{R}, \quad |AD| = a \frac{r}{R}, \quad |BC| = \sqrt{|BD| \cdot |BA|} = a \sqrt{\frac{R+r}{R}}.$$

**207.** Обозначения:  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O$  — центры окружностей (первые две касаются  $AB$ ),  $x$ ,  $y$  и  $R$  — соответственно их радиусы. Общие касательные к окружностям  $O_1$  и  $O_2$ ,  $O_1$  и  $O$ ,  $O_2$  и  $O$  равны соответственно  $2\sqrt{xy}$ ,  $2\sqrt{Rx}$ ,  $2\sqrt{Ry}$ . По условию  $2\sqrt{xy} = a$ . Рассмотрим прямоугольный треугольник  $O_1MO_2$  с прямым углом при вершине  $M$ ;  $O_1M \parallel BC$ ,  $|O_1O_2| = x + y$ ,  $|O_2M| = 2R - (x + y)$ ,  $|O_1M| = |2\sqrt{Rx} - 2\sqrt{Ry}|$  ( $O_1M$  равен разности общих касательных к окружностям с центрами  $O$ ,  $O_1$  и  $O$ ,  $O_2$ ). Таким образом,  $(x + y)^2 = (2R - x - y)^2 + (2\sqrt{Rx} - 2\sqrt{Ry})^2$ , откуда  $R = 2\sqrt{xy} = a$ .

**208.** Заметим, что  $O_1O_2O_3O_4$  — параллелограмм с углами  $\alpha$  и  $\pi - \alpha$  ( $O_1O_4 \perp AC$  и  $O_2O_3 \parallel AC$ , значит,  $O_1O_4 \parallel O_2O_3$  и т. д.). Если  $K$  — середина  $AM$ ,  $L$  — середина  $MC$ , то  $|O_3O_4| = \frac{|KL|}{\sin \alpha} = \frac{|AC|}{2 \sin \alpha}$ . Аналогично,

$$|O_2O_3| = \frac{|BD|}{2 \sin \alpha}; \quad \text{следовательно,} \quad S_{O_1O_2O_3O_4} = \frac{|AC| \cdot |BD| \sin \alpha}{4 \sin^2 \alpha} = \frac{S_{ABCD}}{2 \sin^2 \alpha}. \quad \text{О т в е т: } 2 \sin^2 \alpha.$$

**209.** Биссектрисы параллелограмма при пересечении образуют прямоугольник, диагонали которого параллельны сторонам параллелограмма и равны разности сторон параллелограмма. Следовательно, если  $a$  и  $b$  — стороны параллелограмма,  $\alpha$  — угол между ними, то  $S = ab \sin \alpha$ ,  $Q = \frac{1}{2}(a - b)^2 \sin \alpha$ ,  $\frac{S}{Q} = \frac{2ab}{(a - b)^2}$ . О т в е т:

$$\frac{S + Q + \sqrt{Q^2 + 2QS}}{S}.$$

**210.** Обозначим через  $x$  площадь треугольника  $OMN$ , через  $y$  площадь треугольника  $CMN$ , тогда  $\frac{|ON|}{|OA|} = \frac{x}{S_1} = \frac{S_3}{S_2}$ ,  $x = \frac{S_1 S_3}{S_2}$ ,

$$\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{S_1 + x}{y} = \frac{S_1 + S_2}{S_3 + x + y}. \quad \text{Искомая площадь равна}$$

$$\frac{S_1 S_3 (S_1 + S_2)(S_3 + S_2)}{S_2 (S_2^2 - S_1 S_3)}.$$

**211.** Пусть в треугольнике  $ABC$  угол  $C$  прямой,  $M$  — точка пересечения медиан,  $O$  — центр вписанной окружности,  $r$  — ее радиус,  $\angle B = \alpha$ ; тогда  $|AB| = r \left( \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right) = \frac{r\sqrt{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}$ ,

$|CM| = \frac{1}{3}|AB|$ ,  $|CO| = r\sqrt{2}$ ,  $|OM| = r$ ,  $\angle OCM = \alpha - \frac{\pi}{4}$ . Записывая

теорему косинусов для  $\triangle COM$ , получим  $1 = 2 + \frac{8}{9(2x - \sqrt{2})^2} -$

$-\frac{8x}{3(2x - \sqrt{2})}$ , где  $x = \cos \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right)$ , откуда  $x = \frac{4\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{6}$ . Ответ:  $\frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{4\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{6}$ .

**212.** Пусть отрезки медианы равны  $a$ . Обозначим через  $x$  меньший из отрезков, на которые разделена точкой касания сторона, соответствующая медиане. Теперь все стороны треугольника можно выразить через  $a$  и  $x$ . Стороны, заключающие медиану:  $a\sqrt{2} + x$ ,  $3a\sqrt{2} + x$ , третья сторона:  $2a\sqrt{2} + 2x$ . Используя формулу длины медианы (задача I.11), получим  $9a^2 = \frac{1}{4}[2(a\sqrt{2} + x)^2 + 2(3a\sqrt{2} + x)^2 - (2a\sqrt{2} + 2x)^2]$ , откуда  $x = a\sqrt{2}/4$ . Ответ: 10:5:13.

**213.** Пусть  $|BC| = a$ ,  $\angle C > \angle B$ ,  $D$  и  $E$  — середины  $AB$  и  $AC$ . Четырехугольник  $EMDN$  — вписанный (так как  $\angle MEN = \angle MDN = 90^\circ$ ),  $|MN| = a$ ,  $|ED| = a/2$ ,  $MN$  — диаметр окружности, описанной около  $MEND$ . Следовательно,  $\angle DME = 30^\circ$ ,  $\angle CAB = 90^\circ - \angle EMD = 60^\circ$ ,  $\angle CBA = \angle EDN = \angle EMN = \angle EMD/2 = 15^\circ$ ,  $\angle ACB = 105^\circ$ . Ответ:  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B = 15^\circ$ ,  $\angle C = 105^\circ$  или  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B = 105^\circ$ ,  $\angle C = 15^\circ$ .

**214.** Обозначим через  $K$  и  $M$  соответственно точки пересечения прямой  $EF$  с  $AD$  и  $BC$ . Пусть  $M$  лежит на продолжении  $BC$  за точкой

$B$ . Если  $|AD| = 3a$ ,  $|BC| = a$ , то из подобия соответствующих треугольников следует, что  $|DK| = |AD| = 3a$ ,  $|MB| = |BC| = a$  (рис. 1, а).

Кроме того,  $|ME| = |EF| = |FK|$ . Если  $h$  — высота трапеции, то расстояние от  $E$  до  $AD$  равно  $\frac{2}{3}h$ ,  $S_{EDK} = ah$ ,  $S_{EDF} =$

$$= \frac{1}{2} S_{EDK} = \frac{ah}{4} = \frac{1}{4} S.$$

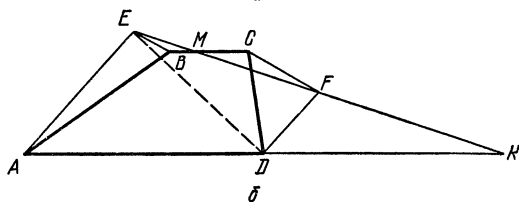
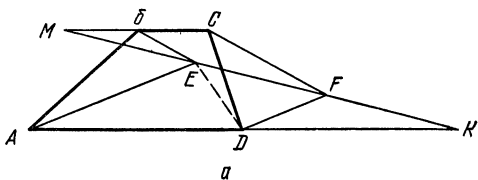


Рис. 1



Если же прямая  $EF$  пересекает основание  $BC$  в точке  $M$ , то  $|BM| = \frac{1}{3}a$  (рис. 1, б). В этом случае  $\frac{|EK|}{|MK|} = 2: \frac{5}{3} = \frac{6}{5}$  и расстояние от  $E$  до  $AD$  равно  $\frac{6}{5}h$ , так что  $S_{EFD} = \frac{1}{2}S_{EDK} = \frac{1}{4} \cdot 3a \cdot \frac{6}{5}h = \frac{9}{20}S$ .  
 Ответ:  $\frac{1}{4}S$  или  $\frac{9}{20}S$ .

**215.** Пусть  $O$  — центр вписанной окружности,  $M$  — середина  $BC$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $N$  — точки касания вписанной окружности со сторонами  $AC$ ,  $AB$  и  $BC$  треугольника. Обозначим:  $|AK| = |AL| = x$ ,  $|CK| = |CN| = y$ ,  $|BL| = |BN| = z$ ,  $y + z = a$ . По условию  $|OM| = \frac{a}{2} - r$ . Следовательно,  
 $|NM| = \sqrt{|OM|^2 - |ON|^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - ar}$  и один из отрезков,  $y$  или  $z$ , равен  $\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - ar}$ , а другой  $\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - ar}$ . Приравняем выражения для площади треугольника по формулам Герона и  $S = pr$ :  
 $\sqrt{(x+y+z)xyz} = (x+y+z)r \Rightarrow xar = (x+a)r^2 \Rightarrow x = \frac{ar}{a-r}$ . Таким образом, искомая площадь равна  $\left(\frac{ar}{a-r} + a\right)r = \frac{a^2r}{a-r}$ .

**216.** Докажем, что если  $C_1$  и  $C_2$  (рис. 2) находятся по другую сторону от  $BC$ , чем вершина  $A$ , то центр окружности, описанной около  $\triangle CC_1C_2$ , находится в точке  $O$  на стороне  $AB$ , при этом  $|BO| = \frac{1}{4}|AB|$ . Проведя высоту  $CM$  из вершины  $C$ , получим, что

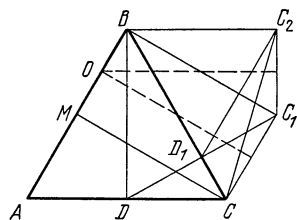


Рис. 2

$BC_1CM$  — прямоугольник. Значит, перпендикуляр, восстановленный к  $CC_1$  в середине, проходит через  $O$ . Учитывая, что  $C_1C_2 \parallel BD$  и  $|C_1C_2| = \frac{1}{2}|BD|$ , получим, что перпендикуляр к  $C_1C_2$  в его середине также проходит через  $O$ . Теперь легко найдем искомый радиус: он равен  $\sqrt{|CM|^2 + |MO|^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{16}} = \frac{a}{4}\sqrt{13}$ .

**217.** Разберите два случая: 1) когда основания перпендикуляров находятся на сторонах параллелограмма и 2) когда один из перпендикуляров не пересекает сторону, на которую он опущен. В 1-м случае приходим к противоречию, а во 2-м получим, что  $\cos \alpha = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$ , где  $\alpha$  — острый угол данного параллелограмма.

**218.** Выразив угол  $PQN$  через углы треугольника и учитывая, что  $\angle PMN + \angle PQN = 180^\circ$ , найдем:  $\angle PMN = 60^\circ$ ; отсюда  $\angle NPQ = \angle QMN = 30^\circ$ ,  $\angle PNQ = \angle PMQ = 30^\circ$ , т. е.  $\triangle PQN$  — равнобедренный с углами при стороне  $PN$  по  $30^\circ$ ,  $|PQ| = |QN| = 1/\sqrt{3}$ .

**219.** Из условия следует, что  $ABCD$  – трапеция,  $BC \parallel AD$ ,  $AC$  – биссектриса угла  $BAD$ ; значит,  $|AB| = |BC|$ , аналогично  $|BC| = |CD|$ . Пусть  $|AB| = |BC| = |CD| = a$ ,  $|AD| = b$ . Расстояние между серединами диагоналей  $2r$ , следовательно,  $\frac{b-a}{2} = 2r$ . Проведем высоту  $BM$  из

точки  $B$  на  $AD$ , получим, что  $|AM| = \frac{b-a}{2} = 2r$ ,  $|BM| = 2r$ . Следовательно,  $a = |AB| = 2r\sqrt{2}$ ,  $b = 4r + 2r\sqrt{2}$ . Ответ:  $4r^2(\sqrt{2} + 1)$ .

**220.** Обозначим углы  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно через  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Пусть  $H$  – точка пересечения высот,  $O$  – центр окружности, проходящей через  $A$ ,  $H$  и  $C$ . Тогда  $\angle HOC = 2\angle HAC = 2(90^\circ - \gamma)$ ,  $\angle HOA = 2\angle HCA = 2(90^\circ - \alpha)$ . Но  $\angle AOC = 180^\circ - \beta$  (так как  $BAOC$  – вписанный),  $2(90^\circ - \gamma) + 2(90^\circ - \alpha) = 180^\circ - \beta$ ,  $360^\circ - 2\alpha - 2\gamma = 180^\circ - \beta$ ,  $2\beta = 180^\circ - \beta$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $|AC| = 2R \sin \beta = \sqrt{3}$ .

**221.** Обозначив отношение  $\frac{|AM|}{|MC|} = \lambda$ , будем иметь:  $S_{MCP} = \frac{T}{\lambda}$ ,  $S_{CPN} = \lambda Q$ ,  $S_{MCP} = \lambda S_{CPN}$ ; следовательно,  $(T/Q) = \lambda^3$ ,  $S_{ABC} = \frac{|AC|}{|MC|} \cdot \frac{|BC|}{|CN|} S_{CMN} = \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda} \left( \frac{T}{\lambda} + \lambda Q \right) = \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda^2} (T + \lambda^2 Q) = (\lambda + 1)^3 Q = (T^{1/3} + Q^{1/3})^3$ .

**222.** Если  $O$  – центр окружности, то площадь  $\triangle OMN$  в  $\frac{a}{a-R}$  раз больше площади  $\triangle KMN$ . Если  $\angle MON = \alpha$ , то  $\frac{R^2}{2} \sin \alpha = \frac{a}{a-R} S$ ,  $\sin \alpha = \frac{2aS}{R^2(a-R)}$ ,  $|MN| = 2R \sin \frac{\alpha}{2} = R \sqrt{1 - \cos \alpha} = R \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4a^2 S^2}{R^4(a-R)^2}}}$ . Задача имеет решение, если  $S \leq \frac{R^2(a-R)}{2a}$ .

**223.** Если  $\angle BAC = \angle BCA = 2\alpha$ , то по теореме синусов найдем:  $|AE| = \frac{2m \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$ ,  $|AF| = \frac{|AE|}{\cos \alpha} = \frac{2m \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha \cos \alpha}$ . Таким образом,  $\frac{9}{4} m = \frac{2m \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha \cos \alpha}$ , откуда  $\cos 2\alpha = \frac{7}{18}$ ,  $S_{ABC} = m^2 \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{5m^2 \sqrt{11}}{7}$ .

**224.** Точки  $C$ ,  $M$ ,  $D$  и  $L$  лежат на одной окружности, следовательно,  $\angle CML = \angle CDL = 30^\circ$ . Точно так же  $\angle CMK = 30^\circ$ ; таким образом,  $\angle LMK = 60^\circ$  и  $\triangle LMK$  – правильный,  $|KL| = 2\sqrt{5}$ . По теореме косинусов найдем, что  $\cos \angle LCK = -3/5$ . Поскольку  $\angle DCB = \angle LCK - 120^\circ$ , то  $|DB| = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ .

**225.** Пусть  $A$  – точка пересечения прямых  $BC$  и  $KM$ . Четырехугольник  $ONBC$  – вписанный ( $\angle OCB = \angle ONB = 90^\circ$ ), следовательно,  $\angle OBC = \angle ONC = \alpha/2$ . Точно так же вписанным является четырехугольник  $CMAO$  и  $\angle CAO = \angle CMO = \alpha/2$ , т. е.  $\triangle OAB$  – равнобедренный. Итак,  $|CB| = |AC| = |CO| \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb \cos \frac{\alpha}{2}} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ .

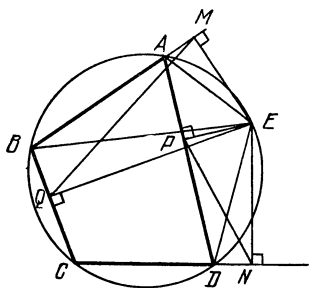


Рис. 3

**226.** Точки  $E, M, B$  и  $Q$  (рис. 3) лежат на одной окружности с диаметром  $BE$ , а точки  $E, P, D$  и  $N$  — на окружности с диаметром  $ED$ . Таким образом,  $\angle EMQ = \angle EBQ = 180^\circ - \angle EDC = \angle EDN = \angle EPN$ ; аналогично  $\angle EQM = \angle ENP$ , т. е.  $\triangle EMQ$  подобен  $\triangle EPN$  с коэффициентом подобия  $\sqrt{k}$ . (Для полноты решения необходимо рассмотреть и другие случаи расположения точек.) Ответ:  $d\sqrt{k}$ .

**227.** Продолжив непараллельные стороны трапеции до пересечения, получим три подобных треугольника, причем коэффициент подобия между средним и большим треугольником и между меньшим и средним один и тот же. Обозначим этот коэффициент через  $\lambda$ , большее основание — через  $x$ , радиус большей окружности — через  $R$ . Тогда отрезки, параллельные большому основанию, равны соответственно  $\lambda x$  и  $\lambda^2 x$ , боковая сторона нижней трапеции —  $2R \frac{d}{c}$ , второй радиус —  $\lambda R$ . Значит,  $R + \lambda R = \frac{c}{2}$ . По свойству описанного четырехугольника  $x + \lambda x = 2R + 2R \frac{d}{c}$ . И наконец, опустив из конца меньшего основания всей трапеции перпендикуляр на большее основание, получим прямоугольный треугольник с катетами  $c$ ,  $x - \lambda^2 x$  и гипотенузой  $d$ . Таким образом, имеем систему

$$\begin{cases} x(1 + \lambda) = 2R \frac{c + d}{c}, \\ x(1 - \lambda^2) = \sqrt{d^2 - c^2}, \\ R(1 + \lambda) = c/2, \end{cases}$$

откуда  $\lambda = \frac{d - \sqrt{d^2 - c^2}}{c}$ . Ответ: основания равны  $\frac{d - \sqrt{d^2 - c^2}}{c}$  и  $\frac{d + \sqrt{d^2 - c^2}}{c}$ .

**228.** Опустим из центров окружностей перпендикуляры на одну из боковых сторон и проведем через центр меньшей окружности прямую, параллельную этой стороне. Получится прямоугольный треугольник с гипотенузой  $R + r$ , одним катетом  $R - r$  и острым углом при этом катете  $\alpha$ , равным острому углу при основании трапеции. Таким образом,  $\cos \alpha = \frac{R - r}{R + r}$ . Большее основание равно  $2R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = 2R \sqrt{\frac{R}{r}}$ . Меньшее основание равно  $2r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2r \sqrt{\frac{r}{R}}$ .

**229.** Возьмем на стороне  $AB$  точку  $K$  так, что  $|BK| = |BD|$ , а на продолжении  $AC$  — точку  $E$  так, что  $|CE| = |CD|$ . Покажем, что  $\triangle ADK$

подобен  $\triangle ADE$ . Если  $A, B$  и  $C$  — величины углов  $\triangle ABC$ , то  $\angle DKA = 180^\circ - \angle DKB = 180^\circ - (90^\circ - \angle B/2) = 90^\circ + \angle B/2$ ,  $\angle ADE = 180^\circ - \angle CED - \angle A/2 = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) = 90^\circ + \angle B/2$ . Таким образом,  $\angle AKD = \angle ADE$ . Кроме того, по условию  $\angle DAE = \angle DAK$ .  
**О т в е т:**  $\sqrt{ab}$ .

**230.** В обозначениях предыдущей задачи

$$|AD|^2 = (|AC| + |CD|)(|AB| - |BD|) = |AC| \cdot |AB| - |CD| \cdot |BD| + \\ + (|AB| \cdot |CD| - |AC| \cdot |BD|).$$

Но слагаемое в скобках равно нулю, поскольку (см. задачу 1.9)

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CD|}.$$

**231.** Продолжим  $BN$  и  $CN$  до вторичного пересечения со второй окружностью в точках  $K$  и  $L$  соответственно;  $|MN| = |NK|$ , так как  $\angle ANB = 90^\circ$  и  $MK$  есть хорда окружности с центром в  $A$ . Так как равны соответствующие дуги, то  $\angle LNK = \angle BNC = \angle BND$ . Таким образом,

$$|LN| = |ND| = b, |MN| \cdot |NK| = |MN|^2 = ab, |MN| = \sqrt{ab}.$$

**232.** Заметим, что  $PQ \perp CB$ . Пусть  $T$  — точка пересечения  $MN$  и  $PQ$ ,  $L$  и  $K$  — основания перпендикуляров, опущенных из  $C$  и  $B$  на прямую  $MN$  ( $L$  и  $K$  лежат на окружностях, построенных на  $CN$  и  $BM$  как на диаметрах). Используя свойства пересекающихся хорд в окружностях, получим  $|PT| \cdot |TQ| = |NT| \cdot |LT|$ ,  $|PT| \cdot |TQ| = |MT| \cdot |TK|$ . Но  $|LT| = |CD|$ ,  $|TK| = |DB|$  (так как  $CLKB$  — прямоугольник, а  $PQ \perp CB$ ). Таким образом,  $|NT| \cdot |CD| = |MT| \cdot |DB|$ ,  $\frac{|MT|}{|NT|} =$

$\frac{|CD|}{|DB|}$ , т. е. прямая  $PQ$  делит  $CB$  и  $MN$  в одном и том же отношении, значит,  $PQ$  проходит через  $A$ , а  $D$  есть основание высоты. **О т в е т:**  $|BD| : |DC| = 1 : \sqrt{3}$ .

**233.** Пусть  $\angle BOC = 2\alpha$ ,  $\angle BOL = 2\beta$ . Тогда  $|AC| = 2R \cos \alpha$ ,  $|CL| = 2R \sin(\alpha + \beta)$ ,  $|CM| = |CL| \cos(90^\circ - \beta) = 2R \sin(\alpha + \beta) \sin \beta$ ,  $|AM| = |AC| - |CM| = 2R(\cos \alpha - \sin(\alpha + \beta) \sin \beta) = 2R \cos \beta \cos(\alpha + \beta)$  и, наконец,  $|AN| = a = |AM| \cos \alpha = 2R \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta)$ . С другой стороны, если  $K, P$  и  $Q$  — середины  $AO, CO$  и  $CL$  соответственно, то  $|KP| = \frac{1}{2}|AC| = R \cos \alpha$ . Далее,  $|PQ| = R/2$ ,  $\angle KPQ = \angle KPO + \angle OPQ = \alpha + 180^\circ - \angle COL = 180^\circ - \alpha - 2\beta$  и, по теореме косинусов,  $|KQ|^2 = \frac{R^2}{4} + R^2 \cos^2 \alpha + R^2 \cos \alpha \cos(\alpha + 2\beta) = \frac{R^2}{4} +$   
 $+ 2R^2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta) = \frac{R^2}{4} + Ra$ . **О т в е т:**  $\sqrt{\frac{R^2}{4} + Ra}$ .

**234.** Из подобия треугольников  $MAВ$  и  $MBC$  следует, что

$$\frac{|MA|}{|MC|} = \frac{|MA|}{|MB|} \cdot \frac{|MB|}{|MC|} = \frac{|BA|^2}{|BC|^2} = k^2.$$

235. Из задачи I.234 следует, что  $\frac{|AM|^2}{|MB|^2} = \frac{|AC|}{|BC|}, \frac{|AN|^2}{|NB|^2} = \frac{|AD|}{|BD|}$ .

Если  $K$  — точка пересечения  $MN$  и  $AB$ , то  $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{S_{AMN}}{S_{BMN}} = \frac{|AM| \cdot |AN| \sin \angle MAN}{|MB| \cdot |NB| \sin \angle MBN} = \sqrt{\frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{|AD|}{|BD|}} = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\alpha-1)(\beta-1)}}$ .

236. Пусть  $K, L, M$  и  $N$  — точки касания сторон  $AB, BC, CD$  и  $DA$  с окружностью. Обозначим через  $P$  точку пересечения  $AC$  и  $KM$ . Если  $\angle AKM = \varphi$ , то  $\angle KMC = 180^\circ - \varphi$ . Таким образом,  $\frac{|AP|}{|PC|} = \frac{S_{AKM}}{S_{KMC}} =$

$$= \frac{\frac{1}{2}|AK| \cdot |KM| \sin \varphi}{\frac{1}{2}|KM| \cdot |MC| \sin(180^\circ - \varphi)} = \frac{|AK|}{|MC|} = \frac{a}{b}.$$

Но в таком же отношении разделит  $AC$  и прямая  $NL$ . Значит, прямые  $AC, KM$  и  $NL$  пересекаются в одной точке. Применяя те же рассуждения к диагонали  $BD$ , получим, что  $BD$  также проходит через точку  $P$ . Искомое отношение равно  $a/b$ .

237. Пусть  $P$  и  $Q$  — точки пересечения соответственно  $BK$  и  $AC, AB$  и  $DC$ . Прямая  $QP$  пересекает  $AD$  в точке  $M, BC$  — в точке  $N$ . Используя подобие соответствующих треугольников, запишем  $\frac{|AM|}{|MD|} =$

$$= \frac{|BN|}{|NC|} = \frac{|MK|}{|AM|} = \frac{|AK| - |AM|}{|AM|}. \quad \text{Если } |AM| = x|AD|, \text{ то}$$

$$\frac{|AM|}{|MD|} = \frac{|AM|}{|AD| - |AM|} = \frac{x}{1-x}, \quad \frac{x}{1-x} = \frac{\lambda - x}{x}, \quad \text{откуда } x = \frac{\lambda}{\lambda + 1}.$$

Ответ:  $\frac{\lambda}{\lambda + 1}$ . Если  $\lambda = \frac{1}{n}$ , то  $|AM| = \frac{1}{n+1}|AD|$ . Таким образом,

взяв сначала  $K$  совпадающей с  $D$  ( $\lambda = 1$ ), получим в качестве  $M_1$  середину  $AB$ , взяв  $K$  совпадающей с  $M_1$ , найдем, что  $M_2$  отделяет  $1/3$  от  $AD$  и т. д.

238. Пусть  $|KM| = |KN| = x, |AD| = y, |DB| = z$ . Тогда  $|CD| = \sqrt{yz}, y + z = c$ . Радиус вписанной в  $\triangle AKB$  окружности равен  $\frac{1}{2}|CD| = \frac{1}{2}\sqrt{yz}$ . Выразим площадь треугольника  $AKB$  по формулам Герона и  $S = pr$ . Получим уравнение  $\sqrt{(x+y+z)xyz} = (x+y+z)\frac{1}{2}\sqrt{yz}$ . Учитывая, что  $y+z=c$ , найдем  $x = c/3$ .

239. Проведем через  $A_2$  прямую, параллельную  $AC$ . Пусть  $R$  — точка пересечения этой прямой с  $AB$ . Из того, что  $\frac{|AR|}{|RC_1|} = \frac{|B_1A_2|}{|A_2C_1|} = \frac{1}{k}, \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = k$ , найдем  $\frac{|AR|}{|AB|} = \frac{k}{(k+1)^2}$ . Точно так же,

проведя через  $C_2$  прямую, параллельную  $AC$ , до пересечения с  $BC$  в точке  $S$ , получим, что  $\frac{|CS|}{|CB|} = \frac{k}{(k+1)^2}$ . Поэтому точки  $R, A_2, C_2$  и  $S$  лежат на одной прямой, параллельной  $AC$ . Таким образом, стороны  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_2B_2C_2$  соответственно параллельны. Теперь нетрудно получить, что  $|A_2C_2| = |RS| - |RA_2| - |C_2S| = |AC| \left(1 - \frac{3k}{(k+1)^2}\right)$ , поэтому коэффициент подобия равен  $\frac{k^2 - k + 1}{(k+1)^2}$ .

**240.** Воспользуемся следующей формулой для площади треугольника:  $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ , где  $A, B$  и  $C$  — углы треугольника. Тогда площадь треугольника  $A_1B_1C_1$ , где  $A_1, B_1$  и  $C_1$  — точки пересечения биссектрис  $\triangle ABC$  с описанной окружностью, будет равна  $S_1 = 2R^2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{C+A}{2} = 2R^2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}$ , а  $\frac{S}{S_1} = 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ . С другой стороны,  $|BC| = 2R \sin A$ ,  $r \left( \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right) = 2R \sin A$ ,  $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ . Таким образом,  $\frac{S}{S_1} = \frac{2r}{R}$ .

**241.** Пусть  $O$  — центр подобия вписанного и описанного треугольников,  $M_1$  и  $M_2$  — две сходственные вершины ( $M_1$  лежит на стороне  $AB$ ), отрезок  $OA$  пересекает вписанный треугольник в точке  $K$ . Тогда  $S_{OM_1K} = \lambda S_1$ ,  $S_{OM_2A} = \lambda S_2$ ,  $\frac{S_{OM_1K}}{S_{OM_2A}} = \frac{|OM_1|}{|OM_2|} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$ , откуда  $S_{OM_1K} = \lambda \sqrt{S_1 S_2}$ , где  $\lambda = \frac{S_{OM_1K}}{S_1}$ . Рассмотрев шесть таких треугольников и сложив их площади, получим:  $S_{ABC} = \sqrt{S_1 S_2}$ .

**242.** Пусть  $O$  — центр описанного круга,  $H$  — точка пересечения высот  $\triangle ABC$ . Поскольку прямая  $OH$  перпендикулярна биссектрисе угла  $A$ , то она пересекает стороны  $AB$  и  $AC$  в таких точках  $K$  и  $M$ , что  $|AK| = |AM|$ . Таким образом,  $\angle AOB = 2\angle C$  (считаем, что угол  $C$  — острый);  $\angle OAK = 90^\circ - \angle C = \angle HAM$ . Значит,  $\triangle OAK = \triangle HAM$  и  $|OA| = |HA| = R$  ( $R$  — радиус описанного круга). Если  $D$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $O$  на  $BC$ , то  $|OD| = |AH|/2 = R/2$ . Следовательно,  $\cos A = \cos \angle DOC = 1/2$ ,  $\angle A = 60^\circ$ .

**243.** Докажите, что треугольник будет остроугольным, прямоугольным или тупоугольным, если расстояние между центром описанной окружности и точкой пересечения высот будет соответственно меньше, равно или больше половины наибольшей стороны. Ответ:  $90^\circ, 60^\circ$  и  $30^\circ$ .

**244.** Условие  $S_{\triangle BDM} = S_{\triangle BCK}$  означает, что  $|BD| \cdot |BM| = |BK| \cdot |BC|$ , т. е.

$$(|BA| + |AC|)|BM| = |BK| \cdot |BC|. \quad (1)$$

Проведем через  $M$  прямую, параллельную  $AC$ ; пусть  $L$  — точка пересечения этой прямой с  $BA$ . Докажем, что  $|LM| = |KL|$ ; отсюда будет следовать, что искомый  $\angle BKM = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{\alpha}{2}$ . Поскольку  $\triangle BLM$

и  $\triangle BAC$  подобны, то  $|LM| = \frac{|BM|}{|BC|} \cdot |AC|$ ,  $|BL| = \frac{|BM|}{|BC|} \cdot |AB|$ . Теперь найдем из (1)  $|BK|$  и посчитаем:  $|KL| = |BK| - |BL| = \frac{|BA| + |AC|}{|BC|} \cdot |BM| - \frac{|BM|}{|BC|} \cdot |AB| = \frac{|BM|}{|BC|} \cdot |AC|$ , откуда  $|LM| = |KL|$ .

**245.** Пусть  $|AD| = a$ ,  $|BC| = b$ . Опустим из  $O$  перпендикуляр  $OK$  на  $AB$ . Теперь найдем:  $|BK| = \sqrt{ab} \frac{b}{b+a}$ ,  $|BE| = \sqrt{ab} \frac{b}{a-b}$ ,  $|MK| = \frac{\sqrt{ab}}{2} - \sqrt{ab} \frac{b}{b+a} = \sqrt{ab} \frac{a-b}{2(a+b)}$ ,  $|EK| = |BE| + |BK| = \sqrt{ab} - \frac{2ab}{(a-b)(a+b)}$ ,  $|OK| = \frac{ab}{a+b}$ . Легко проверить, что  $|OK|^2 = |EK| \cdot |MK|$ . Ответ:  $90^\circ$ .

**246.** Заметим, что точки  $A$ ,  $M$ ,  $N$  и  $O$  лежат на одной окружности (рис. 4). Следовательно,  $\angle NMO = \angle OAN = 90^\circ - \angle AON$ . Значит, при повороте  $OA$  вокруг  $O$  на угол  $\varphi$  прямая  $NM$  повернется на такой же угол  $\varphi$  (в другом направлении), а при перемещении  $A$  по прямой  $OA$  прямая  $NM$  перемещается параллельно самой себе. Отсюда следует, что искомый угол равен  $\alpha$ .

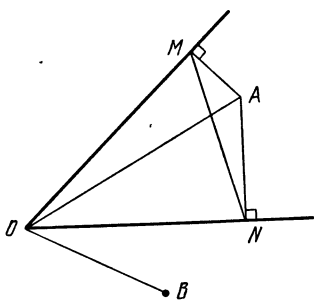


Рис. 4

**247.** Если  $O_1$  — центр меньшей окружности, а  $\angle BOA = \varphi$ , то  $\angle BAO = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$ ,  $\angle CO_1A = 90^\circ + \varphi$ ,  $\angle CAO_1 = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$ . Таким образом,  $\angle BAC = \angle BAO - \angle CAO_1 = 45^\circ$ .

**248.** Построим на  $AB$  внутри квадрата правильный треугольник  $ABK$ . Тогда  $\angle KAB = 60^\circ$ ,  $\angle KCD = 15^\circ$ , т. е.  $K$  совпадает с  $M$ . Ответ:  $30^\circ$ .

**249.** Пусть  $M_1$  симметрична  $M$  относительно  $BC$ .  $CB$  — биссектриса угла  $MCM_1$ . Из того, что  $\angle M_1CA = 60^\circ$  и  $|AC| = \frac{1}{2}|CM_1|$ , следует, что  $\angle M_1AC = 90^\circ$ , значит  $AB$  — биссектриса угла  $M_1AC$ , кроме того,  $CB$  — биссектриса угла  $M_1CM$ , т. е.  $B$  равноудалена от прямых  $M_1C$  и  $M_1A$  и лежит на биссектрисе угла, смежного с углом  $AM_1C$ . Итак,  $\angle BMC = \angle BM_1C = 75^\circ$ . Ответ:  $75^\circ$ .

**250.** Если  $\angle BAC = 2\alpha$ , то легко найдем, что  $\angle KMC = \angle MKC = 30^\circ + \alpha$ , т. е.  $|MC| = |KC|$ . Продолжим  $MK$  до пересечения с окружностью в точке  $N$ ;  $\triangle KMC$  подобен  $\triangle KAN$ , значит,  $|AN| = |KN| = R$  — радиусу окружности (так как  $\angle AMN = 30^\circ$ ). Точки  $A$ ,  $K$  и  $O$  ле-

жат на окружности с центром в  $N$ ,  $\angle ANO = 60^\circ$ , следовательно,  $\angle AKO = 30^\circ$  или  $150^\circ$ , в зависимости от того, тупой или острый угол  $AMC$ . Ответ:  $30^\circ$  или  $150^\circ$ .

251. а) Проведем биссектрису угла  $A$  и продолжим  $BM$  до пересечения с нею в точке  $N$  (рис. 5). Так как  $|BN| = |NC|$ , то  $\angle BNC = 120^\circ$ , значит, и углы  $BNA$ ,  $CNA$  также по  $120^\circ$ ,  $\angle NCA = \angle NCM = 20^\circ$ , т. е.  $\triangle NMC = \triangle NCA$ ,  $|MC| = |AC|$ . Следовательно,  $\triangle AMC$  — равнобедренный, и  $\angle AMC = 70^\circ$ .

б) Точки  $M$ ,  $P$ ,  $A$  и  $C$  лежат на одной окружности ( $M$  из пункта а)).  $\angle PAC = \angle PMC = 40^\circ$ .

252. Опишем около  $\triangle MCB$  окружность (рис. 6) и продолжим  $BN$  до пересечения с нею в точке  $M_1$ ;  $|CM_1| = |CM|$ , так как углы, на них опирающиеся ( $80^\circ$  и  $100^\circ$ ), в сумме дают  $180^\circ$ ;  $\angle M_1CM = \angle M_1BM = 20^\circ$ , т. е.  $NC$  — биссектриса угла  $M_1CM$  и  $\triangle M_1CN = \triangle NCM$ ,  $\angle NMC = \angle NM_1C = \angle CMB = 25^\circ$ .

253. Возьмем на  $BC$  точку  $K$  (рис. 7) так, что  $\angle KAC = 60^\circ$ ,  $MK \parallel AC$ . Пусть  $L$  — точка пересечения  $AK$  и  $MC$ ;  $\triangle ALC$  — правильный,  $\triangle ANC$  — равнобедренный (подсчитайте углы). Значит,  $\triangle LNC$  — также равнобедренный,  $\angle LCN = 20^\circ$ . Теперь найдем углы  $NLM$  и  $MKN$  — они по  $100^\circ$ , так как  $\triangle MKL$  — правильный, то углы  $KLN$  и  $NKL$  по  $40^\circ$ , т. е.  $|KN| = |LN|$  и  $\triangle MKN = \triangle MLN$ ,  $\angle NML = \angle KMN = 30^\circ$ .

254. Возьмем точку  $K$  (рис. 8) так, чтобы  $\angle KBC = \angle KCB = 30^\circ$  и обозначим через  $L$  точку пересечения прямых  $MC$  и  $BK$ . Так как  $\triangle BNC$  — равнобедренный ( $\angle NBC = \angle NCB = 50^\circ$ ), то  $\angle KNC = 40^\circ$ .

Точка  $L$  есть точка пересечения биссектрис треугольника  $NKC$  ( $LK$  и  $LC$  — биссектрисы). Следовательно,  $NL$  также биссектриса угла  $KNC$  и  $\angle LNB = 60^\circ$ ;  $BN$ , в свою очередь, — биссектриса угла  $MBL$ ; кроме то-

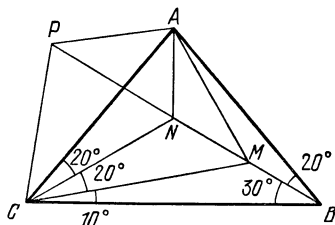


Рис. 5

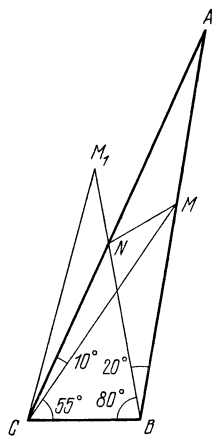


Рис. 6

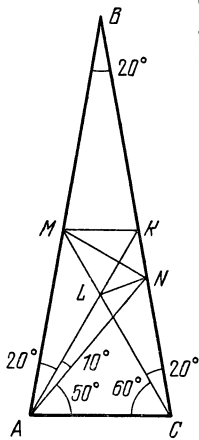


Рис. 7

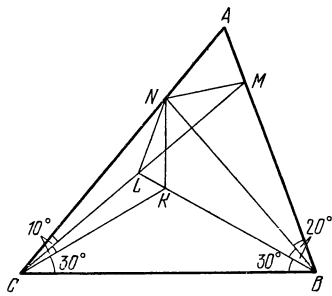


Рис. 8



го,  $BN \perp ML$ ; значит,  $BN$  делит  $ML$  пополам и  $\angle MNB = \angle BNL = 60^\circ$ , а  $\angle NMC = 30^\circ$ .

**255.** Пусть  $O$  — центр вписанной окружности; точки  $C, O, K$  и  $M$  лежат на одной окружности ( $\angle COK = \angle A/2 + \angle C/2 = 90^\circ - \angle B/2 = \angle KMB = 180^\circ - \angle KMC$ ; если же точка  $K$  — на продолжении  $NM$ , то  $\angle COK = \angle CMK$ ). Таким образом,  $\angle OKC = \angle OMC = 90^\circ$ .

**256.** Если  $P$  лежит на дуге  $AB$ ,  $Q$  — на дуге  $AC$ , то обозначив угол  $PAB$  через  $\varphi$ , а угол  $QAC$  через  $\psi$ , получим два соотношения:

$$\begin{cases} \sin^2(C - \varphi) = \sin \varphi \sin(B + C - \varphi), \\ \sin^2(B - \psi) = \sin \psi \sin(B + C - \psi). \end{cases}$$

Запишем разность этих равенств, после преобразований получим:

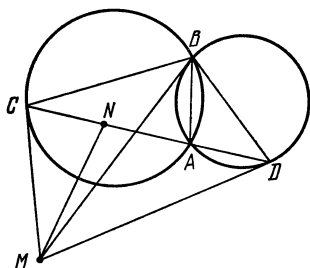


Рис. 9

$\sin(B + C - \varphi - \psi) \sin[(B - C) + (\varphi - \psi)] = \sin(B + C - \varphi - \psi) \sin(\varphi - \psi)$ , откуда (поскольку  $0 < B + C - \varphi - \psi < \pi$ ,  $B - C + \varphi - \psi = \pi - (\varphi - \psi)$ ). Ответ:  $\frac{\pi - \alpha}{2}$ .

**257.** Докажем, что  $\triangle CMN$  подобен  $\triangle CAB$  (рис. 9). Имеем:  $\angle MCN = \angle CBA$ . Поскольку четырехугольник  $CBDM$  — вписанный, то  $\frac{|CM|}{|CB|} = \frac{\sin \angle CBM}{\sin \angle CMB} = \frac{\sin \angle CDM}{\sin \angle CDB} =$

$= \frac{\sin \angle DBA}{\sin \angle ADB} = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|CN|}{|AB|}$ . Значит,  $\angle CMN = \angle BCA$ , т. е. иско- мый угол равен или  $\frac{\alpha}{2}$  или  $\pi - \frac{\alpha}{2}$ .

**258.** Пусть  $\angle ABC = 120^\circ$ ,  $BD, AE, CM$  — биссектрисы  $\triangle ABC$ . Покажем, что  $DE$  — биссектриса угла  $BDC$ , а  $DM$  — биссектриса угла  $BDA$ . В самом деле,  $BE$  — биссектриса угла, смежного по отношению с углом  $ABD$ , т. е.  $E$  для  $\triangle ABD$  является точкой пересечения биссектрисы угла  $BAD$  и угла, смежного с углом  $ABD$ ; значит,  $E$  равноудалена от прямых  $AB, BD, AD$ ; таким образом  $DE$  — биссектриса угла  $BDC$ . Точно так же  $DM$  — биссектриса угла  $BDA$ .

**259.** Обозначим:  $\angle ABD = \alpha$ ,  $\angle BDC = \varphi$ . По условию  $\angle DAC = 120^\circ - \alpha$ ,  $\angle BAC = 30^\circ + \alpha$ ,  $\angle ADB = 30^\circ - \alpha$ ,  $\angle DBC = 60^\circ + \alpha$ . По теореме синусов для треугольников  $ABC, BCD, ACD$  получим  $\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{\sin(30^\circ + \alpha)}{\sin(60^\circ + 2\alpha)} = \frac{1}{2 \cos(30^\circ + \alpha)}$ ,  $\frac{|DC|}{|BC|} = \frac{\sin(60^\circ + \alpha)}{\sin \varphi}$ ,  $\frac{|AC|}{|DC|} = \frac{\sin(30^\circ - \alpha + \varphi)}{\sin(120^\circ - \alpha)}$ . Перемножая эти равенства, будем иметь:  $\sin(30^\circ - \alpha + \varphi) = 2 \cos(30^\circ + \alpha) \sin \varphi \Rightarrow 2 \cos(60^\circ + \alpha) \sin(30^\circ - \varphi) = 0$ ; таким образом,  $\angle BDC = \varphi = 30^\circ$ .

**260.** Так же, как в задаче I.17, была получена формула биссектрисы внутреннего угла треугольника  $ABC$ , можно доказать, что

биссектриса внешнего угла  $A$  вычисляется по формуле  $l_A = \frac{2bc \sin \frac{A}{2}}{|b-c|}$

( $|AB| = c$ ,  $|BC| = a$ ,  $|CA| = b$ ). Найдем  $\sin \frac{A}{2}$ :  $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos A)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}}$ . Находя точно так

же  $l_C$ , выражая  $\sin \frac{A}{2}$  и  $\sin \frac{C}{2}$  через стороны треугольника, приравни-

вая  $l_A$  и  $l_C$ , получим:  $\frac{\sqrt{c(a+b-c)}}{|b-c|} = \frac{\sqrt{a(b+c-a)}}{|b-a|}$ . По условию  $b = 2$ ,  $c = 1$ . Значит,  $a$  должно удовлетворять уравнению

$\sqrt{a+1} = \frac{\sqrt{a(3-a)}}{|a-2|} \Rightarrow (a-1)(a^2 - a - 4) = 0$ . Но  $a \neq 1$ , следовательно,

$$|BC| = a = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}.$$

**261.** Если  $O$  и  $O_1$  — центры окружностей, описанных около  $\triangle ABC$  и  $\triangle ADB$ , то  $\triangle AOO_1$  подобен  $\triangle ACD$ . Ответ:  $\alpha R$ .

**262.** Если  $K$  — середина дуги  $AB$ ,  $O$  — центр круга,  $|AB| = 2R = c$ , то  $|CM|^2 = |CD|^2 + |DM|^2 = |CD|^2 + |DK|^2 = |AD||DB| + R^2 + |DQ|^2 = (R + |DO|)(R - |DO|) + R^2 + |DO|^2 = 2R^2 = c^2/2$ . Ответ:  $c\sqrt{2}/2$ .

**263.** Пусть  $KM$  — отрезок, параллельный  $BC$ ,  $N$  и  $L$  — точки касания вписанной окружности со сторонами  $AC$  и  $BC$ . Как известно (см. задачу I.18),  $|AN| = |AL| = p - a$ , где  $p$  — полупериметр  $\triangle ABC$ . С другой стороны,  $|AN| = |AL|$  — полупериметр  $\triangle AKM$ , подобного  $\triangle ABC$ .

Следовательно,  $\frac{p-a}{p} = \frac{b}{a}$ ,  $p = \frac{a^2}{a-b}$ . Ответ:  $\frac{2a^2}{a-b}$ .

**264.** Если  $a, b, c$  — стороны данного треугольника, то периметры отсекаемых треугольников будут  $2(p-a)$ ,  $2(p-b)$ ,  $2(p-c)$ , где  $p$  — полупериметр данного треугольника. Следовательно, если  $R$  — радиус описанной окружности, то  $R_1 + R_2 + R_3 = \left(\frac{p-a}{p} + \frac{p-b}{p} + \frac{p-c}{p}\right)R = R$ . Ответ:  $R_1 + R_2 + R_3$ .

**265.** Если  $\angle A = \alpha$ , то  $|AM| = \frac{|AC|}{\sin \alpha}$ ,  $|AN| = \frac{|AB|}{\sin \alpha}$ , т. е.  $|AM| : |AN| = |AC| : |AB|$ ; таким образом,  $\triangle AMN$  подобен  $\triangle ABC$  с коэффициентом подобия  $\frac{1}{\sin \alpha}$ , поэтому  $|MN| = \frac{|BC|}{\sin \alpha} = 2R$ .

**266.** Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры пересекающихся окружностей. Обозначим их радиусы через  $x$  и  $y$ ,  $|OA| = a$ . Поскольку треугольники  $AOO_1$  и  $AOO_2$ , как следует из условия, равновелики, то, выражая их площади по формуле Герона и учитывая, что  $|O_1A| = x$ ,  $|OO_1| = R - x$ ,  $|O_2A| = y$ ,  $|OO_2| = R - y$ , получим после преобразований  $(R - 2x)^2 = (R - 2y)^2$ , откуда, поскольку  $x \neq y$ , получим:  $x + y = R$ . Ответ:  $R$ .

267. Пусть  $AB$  и  $CD$  — данные хорды, а  $M$  — их точка пересечения.

а) Дуги  $AC$  и  $BD$  в сумме составляют пол-окружности; следовательно,  $|AC|^2 + |BD|^2 = 4R^2$ , таким образом,  $|AM|^2 + |MC|^2 + |MB|^2 + |MD|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 = 4R^2$ . Ответ:  $4R^2$ .

б)  $|AB|^2 + |CD|^2 = (|AM| + |MB|)^2 + (|CM| + |MD|)^2 = 4R^2 + 2|AM| \cdot |MB| + 2|CM| \cdot |MD| = 4R^2 + 2(R^2 - a^2) = 6R^2 - 2a^2$ . Ответ:  $6R^2 - 2a^2$ .

268. Если  $M$  — вторая точка пересечения  $BC$  с меньшей окружностью, то  $|BM| = |PC|$  ( $M$  — между  $B$  и  $P$ ),  $|BP| = |MP| + |BM|$ ,

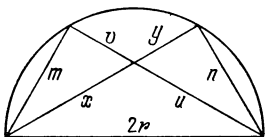


Рис. 10

$$\begin{aligned} |PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 &= \\ &= |PA|^2 + (|PB| - |PC|)^2 + 2|PB| \cdot |PC| = \\ &= |PA|^2 + |MP|^2 + 2|PB| \cdot |PC| = \\ &= 4r^2 + 2(R^2 - r^2) = 2(R^2 + r^2). \end{aligned}$$

269. Обозначим длины отрезков хорд, как на рис. 10, диаметр — через  $2r$ . Используя то, что углы, опирающиеся на диаметр, прямые, а  $xu = uv$ , получим  $x(x + y) + u(u + v) = (u + v)^2 + x^2 - v^2 = (u + v)^2 + m^2 = 4r^2$ .

270. Если  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — дуги, соответствующие сторонам  $a, b, c$  и  $d$ , то доказываемое равенство соответствует тригонометрическому  $\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\delta}{2} + \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\delta}{2}$ , или  $\sin \frac{\alpha + \gamma}{2} = \sin \frac{\beta + \delta}{2}$ .

271. Пусть  $ABCD$  — вписанный четырехугольник.  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $P$ ,  $A$  и  $D$  — на отрезках  $BP$  и  $CP$ .  $BC$  и  $AD$  пересекаются в точке  $Q$ ,  $C$  и  $D$  — на отрезках  $BQ$  и  $AQ$ . Опишем около  $\triangle ADP$  окружность. Обозначим через  $M$  точку пересечения этой окружности с прямой  $PQ$ . (Докажите, что  $M$  на отрезке  $PQ$ .) Имеем:  $\angle DMQ = \angle DAP = \angle BCD$ . Следовательно, четырехугольник  $CDMQ$  — вписанный. Поскольку по условию касательные, проведенные из  $P$  и  $Q$  к исходной окружности, равны  $a$  и  $b$ , то  $|QM| \cdot |QP| = |QD| \cdot |QA| = b^2$ ,  $|PM| \cdot |PQ| = |PD| \cdot |PC| = a^2$ . Сложив эти равенства, получим  $|PQ|^2 = a^2 + b^2$ . Ответ:  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .

272. Отрезок  $QP$  равен (см. задачу I.271)  $\sqrt{(b^2 - R^2) + (c^2 - R^2)} = \sqrt{b^2 + c^2 - 2R^2}$ . Пусть  $ABCD$  — данный четырехугольник,  $Q$  — точка пересечения  $AB$  и  $CD$  ( $A$  на отрезке  $BQ$ ). Для нахождения длины  $PQ$  опишем окружность около  $\triangle QCA$ ; обозначим точку пересечения  $QP$  с этой окружностью через  $N$ . Поскольку  $\angle ANP = \angle ACQ = \angle ABP$ , то точки  $A, B, N$  и  $P$  также лежат на одной окружности. Имеем:  $|QP| \cdot |QN| = |QA| \cdot |QB| = b^2 - R^2$ ,  $|PN| \cdot |PQ| = |CP| \cdot |PA| = R^2 - a^2$ . Вычитая второе равенство из первого, получим  $|QP|^2 = b^2 + a^2 - 2R^2$ . Аналогично,  $|PM|^2 = c^2 + a^2 - 2R^2$ . Ответ:  $|QM| = \sqrt{b^2 + c^2 - 2R^2}$ ,  $|QP| = \sqrt{b^2 + a^2 - 2R^2}$ ,  $|PM| = \sqrt{c^2 + a^2 - 2R^2}$ .

273. Радиус вписанной окружности заключен между величинами радиусов двух предельных случаев. Он не может быть меньше радиуса окружности, вписанной в треугольник со сторонами  $a + b, b + c, c + a$ , который равен  $S/p$ , где  $S$  — площадь,  $p$  — полупериметр треугольника;

таким образом,  $r > \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{(a+b+c)abc}}{a+b+c} = \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$ . С другой стороны,  $r$  меньше радиуса окружности, изображенной на рис. 11 (на этом рисунке противоположные касательные параллельны, точка  $C$  «убегает» в бесконечность). Поскольку для углов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , отмеченных на рисунке, выполняется равенство  $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = c/\rho$ ,  $\operatorname{tg} \beta = a/\rho$ ,  $\operatorname{tg} \gamma = b/\rho$ , где  $\rho$  — радиус изображенной окружности, то  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{ctg} \gamma$ , или  $\frac{(c+a)\rho}{\rho^2 - ac} = \frac{\rho}{b}$ , откуда  $\rho = \sqrt{ab + bc + ca}$ .

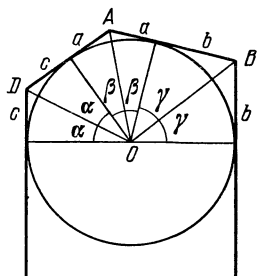


Рис. 11

Таким образом,  $\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}} < r < \sqrt{ab + bc + ca}$ .

**274.** Пусть  $M$  — точка пересечения прямой  $CB$  с линией центров данных окружностей. Обозначим:  $|AM| = x$ ,  $\angle ACB = \varphi$ ;

$|AB|^2 = 2rx$ ,  $|AC|^2 = 2Rx$ ,  $\sin \varphi = \frac{x}{|AC|}$ . Если  $\rho$  — радиус окружности,

описанной около  $\triangle ABC$ , то  $\rho = \frac{|AB|}{2 \sin \varphi} = \frac{|AB| \cdot |AC|}{2x} = \sqrt{Rr}$ . От-

вет:  $\sqrt{Rr}$ .

**275.** Пусть  $O_1$ ,  $O_2$  — центры окружностей,  $A$  — наиболее удаленная от  $BC$  точка их пересечения,  $\angle O_1AO_2 = \varphi$ . Покажем, что  $\angle BAC = \varphi/2$ .

(Для другой точки угол будет  $180^\circ - \frac{\varphi}{2}$ .) В самом деле,  $\angle BAC =$

$= 180^\circ - \angle ABC - \angle BCA = 180^\circ - (90^\circ - \angle ABO_1) - (90^\circ - \angle ACO_2) =$

$= \angle ABO_1 + \angle ACO_2 = \angle BAO_1 + \angle CAO_2 = \varphi - \angle BAC$ . Пусть

$|O_1O_2| = a$ . Проведем  $O_2M \parallel BC$  ( $M$  на  $O_1B$ ), получим  $|BC| = |O_2M| =$

$= \sqrt{a^2 - (R-r)^2}$ . Из  $\triangle O_1AO_2$  найдем, что  $\cos \varphi = \frac{R^2 + r^2 - a^2}{2Rr}$ ; таким

образом, радиус окружности, описанной около  $\triangle ABC$ , равен

$$\frac{|BC|}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{\sqrt{a^2 - (R-r)^2}}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{R^2 + r^2 - a^2}{2Rr}}} = \sqrt{Rr}.$$

Ответ:  $\sqrt{Rr}$  (для обоих треугольников).

**276.**  $DO$  и  $CO$  — биссектрисы углов  $ADC$  и  $DCB$ . Обозначим через  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  величины соответствующих углов (рис. 12). Но  $\alpha + 2\beta + 2\gamma + \alpha = 2\pi$ ; значит,  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ; отсюда следует, что  $\angle DOA = \gamma$ ,  $\angle COB = \beta$  и  $\triangle AOD$  подобен  $\triangle COB$ ; следовательно,  $|AD| \cdot |CB| = |AO| \cdot |OB| = |AB|^2/4$ . Ответ:  $a^2/4b$ .

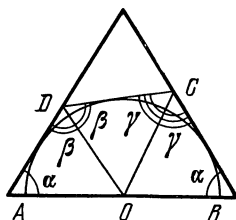


Рис. 12

**277.** Из условия задачи следует, что биссектрисы углов  $C$  и  $D$  пересекаются на стороне  $AB$ . Обозначим эту точку пересечения через

О. Опишем около  $\triangle DOC$  окружность. Пусть  $K$  – вторая точка пересечения этой окружности с  $AB$ . Имеем:  $\angle DKA = \angle DCO = \frac{1}{2} \angle DCB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle DAK) = \frac{1}{2}(\angle DKA + \angle ADK)$ . Значит,  $\angle DKA = \angle ADK$  и  $|AD| = |AK|$ . Аналогично  $|BC| = |BK|$ ; следовательно,  $|AD| + |CB| = |AB|$ . Ответ:  $a - b$ .

**278.** Возьмем на луче  $MC$  точку  $N$  так, что  $|AN| = |AB| = |AD|$ . Поскольку  $\frac{\sin \angle MNA}{\sin \angle MCA} = \frac{|AC|}{|AN|} = \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{\sin \angle ADC}{\sin \angle ACD}$  и  $\angle MCA = \angle ACD$ , то  $\sin \angle MNA = \sin \angle ADC = \sin \angle ABM$ , т. е. углы  $ABM$  и  $MNA$  или равны или в сумме дают  $180^\circ$ . Но  $M$  внутри  $\triangle ABN$ , значит,  $\angle ABM = \angle MNA$ . Теперь можно доказать, что  $\triangle ABM = \triangle AMN$ ;  $\angle NAC = \angle MNA - \angle NCA = \angle ADC - \angle ACD = \varphi$ . Ответ:  $\frac{\alpha + \varphi}{2}$ .

**279.** Обозначим через  $K$  и  $L$  точки касания соответственно 1-й и 2-й окружностей с одной из сторон угла, а через  $M$  и  $N$  – вторые точки пересечения прямой  $AB$  с 1-й и 2-й окружностями. Пусть  $O$  – центр 2-й окружности. Поскольку  $A$  – центр подобия данных окружностей, то  $\frac{|AK|}{|AL|} = \frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AN|} = \lambda$ , откуда  $|AK| \cdot |AL| = \lambda |AL|^2 = \lambda |AB| \cdot |AN| = |AB|^2$ . С другой стороны, из подобия треугольников  $AKC$  и  $ALO$  имеем:  $|AK| \cdot |AL| = |AC| \cdot |AO|$ . Следовательно,  $|AC| \cdot |AO| = |AB|^2$ ; значит, треугольники  $ABC$  и  $AOB$  подобны. Ответ:  $\frac{\alpha}{2}$  или  $\pi - \frac{\alpha}{2}$ .

**280.** Пусть  $\angle BAF = \varphi$ ,  $\angle DBA = \alpha$ ,  $\angle DAB = 2\alpha$  (из условия следует, что  $A$ ,  $E$  и  $F$  по одну сторону от  $BD$  и  $\angle BDA < 90^\circ$ , т. е.  $\alpha > 30^\circ$ ). По теореме синусов для треугольников  $DEA$ ,  $DAB$  и  $BAF$  имеем:  $\frac{|DE|}{|AD|} = \frac{\sin(120^\circ - 2\alpha)}{\sin(30^\circ + \alpha)} = 2 \cos(30^\circ + \alpha)$ ;  $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{\sin \alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{1}{4 \cos(30^\circ + \alpha) \cos(30^\circ - \alpha)}$ ,  $\frac{|AB|}{|BF|} = \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\sin \varphi}$ . Перемножая равенства, найдем, что  $\frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\sin \varphi} = 2 \cos(\alpha - 30^\circ)$ , откуда  $\angle BAF = \varphi = 30^\circ$ .

**281.** Рассмотрим два случая.

1) Отрезок  $BK$  пересекает  $AC$ . Из условия  $\angle BKC = \frac{3\angle A - \angle C}{2}$  будет следовать, что  $\angle C = 90^\circ$  ( $\angle BCK = \angle B + \angle C$ ,  $\angle CBK = \frac{\angle B}{2}$ ,  $\frac{3\angle A - \angle C}{2} + (\angle B + \angle C) + \frac{\angle B}{2} = 180^\circ$  и т. д.). Следовательно, точка  $O$  находится на  $AB$  и сумма расстояний от  $O$  до  $AC$  и  $AB$  равна  $\frac{1}{2}|BC|$ ; таким образом,  $|BC| = 4 > 2 + \sqrt{3} = |AC| + |AB| > |AB|$ , т. е. катет больше гипотенузы – противоречие.

2) Отрезок  $BK$  не пересекает  $AC$ . В этом случае  $\angle CBK = 180^\circ - \frac{\angle B}{2}$ ,  $\angle BCK = \angle A$ ,  $\angle BKC = \frac{3\angle A - \angle C}{2}$  (по условию); значит,  $\left(180^\circ - \frac{\angle B}{2}\right) + \angle A + \frac{3\angle A - \angle C}{2} = 180^\circ$ , откуда  $\angle A = 30^\circ$ .

Возможны вновь два случая.

2а) Центр описанной окружности, точка  $O$  — внутри  $\triangle ABC$ . Пусть перпендикуляр, опущенный из  $O$  на  $AB$ , пересекает  $AB$  в  $N$ , а  $AC$  в  $K$ , а перпендикуляр, опущенный на  $AC$ , пересекает  $AC$  в  $M$ ,  $AB$  в  $L$ . Обозначим  $|OM| = x$ ,  $|ON| = y$ ;  $x + y = 2$  (по условию),  $|OK| = 2x/\sqrt{3}$ ,  $|MK| = x/\sqrt{3}$ ,  $|AK| = 2|NK| = 2y + 4x/\sqrt{3}$ ,  $|AM| = |AK| - |MK| = 2y + x/\sqrt{3}$ . Аналогично найдем:  $|AN| = 2x + y/\sqrt{3}$ . По условию  $|AN| + |AM| = \frac{1}{2}(|AB| + |AC|) = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3})$ . С другой стороны,  $|AN| + |AM| = (2 + \sqrt{3})(x + y) = 2(2 + \sqrt{3})$ . Противоречие.

2б) Точка  $O$  — вне  $\triangle ABC$ . Можно показать, что тупым является  $\angle B$ . Иначе, если  $\angle C > 90^\circ$ ,  $\frac{3\angle A - \angle C}{2} < 0$ , таким образом,  $O$  находится внутри сегмента  $AC$ , не содержащего  $B$ ; впрочем, на ответ это обстоятельство не влияет. В обозначениях предыдущего пункта будем иметь:  $|AM| = 2y - x/\sqrt{3}$ ,  $|AN| = y/\sqrt{3} - 2x$ . Из системы  $y + x = 2$ ,  $|AM| + |AN| = (2 + \sqrt{3})y - (2 + \sqrt{3})x = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$  найдем:  $x = \frac{3}{4}$ ,  $y = \frac{5}{4}$ ,  $|AM| = \frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$ , радиус окружности равен  $\sqrt{|AM|^2 + |MO|^2} = \frac{1}{2}\sqrt{34 - 15\sqrt{3}}$ .

**282.** Если  $C_1$  — точка, симметричная  $C$  относительно  $AB$ , а  $B_1$  — симметрична  $B$  относительно  $AC$ , то (как обычно,  $a, b, c$  — стороны  $\triangle ABC$ ,  $S$  — его площадь)  $|C_1B_1|^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 3A = a^2 + 2bc(\cos A - \cos 3A) = a^2 + 8bc \sin^2 A \cos A = a^2 + 16(b^2 + c^2 - a^2) \frac{S^2}{b^2c^2}$ .

Таким образом, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a^2b^2c^2 + 16S^2(b^2 + c^2 - a^2) = 8b^2c^2, \\ a^2b^2c^2 + 16S^2(a^2 + b^2 - c^2) = 8a^2b^2, \\ a^2b^2c^2 + 16S^2(c^2 + a^2 - b^2) = 14c^2a^2. \end{cases}$$

Вычитая 2-е уравнение из 1-го, учитывая, что  $a \neq c$ , найдем  $4S^2 = b^2$ . Заменяя  $S^2$  в уравнениях на  $b^2/4$ , получим:

$$\begin{cases} a^2c^2 + 4(b^2 - c^2 - a^2) = 0, \\ a^2b^2c^2 + 4b^2c^2 + 4b^2a^2 - 4b^4 - 14a^2c^2 = 0, \\ b^2 = 4S^2. \end{cases}$$

Обозначив  $a^2c^2 = x$ ,  $a^2 + c^2 = y$ , будем иметь:

$$\begin{cases} 4y - x = 4b^2, \\ x(b^2 - 14) + 4b^2y = 4b^4. \end{cases}$$

Умножив в последней системе 1-е уравнение на  $b^2$  и вычтя из 2-го, найдем  $x(2b^2 - 14) = 0$ , откуда  $b = \sqrt{7}$ . Ответ: 1,  $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt{8}$ .

**283.** Докажите, что  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{|b^2 - c^2|}{2S}$ , где  $S$  — площадь треугольника (аналогично для других углов). Ответ:  $\operatorname{arctg} |\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta|$ .

**284.** Найдем котангенс угла между медианой и стороной треугольника  $ABC$ . Если  $\angle A_1AB = \varphi$  ( $AA_1$  — медиана  $\triangle ABC$ , обозначения обычные;  $a, b, c$  — стороны треугольника,  $m_a, m_b, m_c$  — его медианы,  $S$  — площадь), то  $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{2c - a \cos \beta}{h_c} = \frac{2c^2 - ac \cos B}{2S} = \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{4S}$ .

Пусть  $M$  — точка пересечения медиан  $\triangle ABC$ ; прямые, перпендикулярные медианам, выходящим из вершин  $A$  и  $B$ , пересекаются в  $C_1$ ;  $\angle MC_1B = \angle MAB = \varphi$  (четырехугольник  $MAC_1B$  вписанный). Следовательно,  $S_{MBC_1} = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} m_b \right)^2 \operatorname{ctg} \varphi = \frac{(2a^2 + 2c^2 - b^2)(3c^2 + b^2 - a^2)}{72S}$ .

Площадь искомого треугольника есть сумма площадей шести треугольников, каждая из которых находится аналогично. В итоге получим  $\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{12S} = \frac{27(R^2 - d^2)^2}{4S}$  (равенство  $a^2 + b^2 + c^2 = 9(R^2 - d^2)$  до-

кажите самостоятельно). Ответ:  $\frac{27}{4}(R^2 - d^2)^2$ .

**285.**  $60^\circ$ .

**286.** Заметим сначала, что  $|MN|$  равна общей внешней касательной к окружностям с центрами  $O_1$  и  $O_2$  (задача I.142). Следовательно, если радиусы этих окружностей  $x$  и  $y$ ,  $x + y = 2R - a$ , то  $|MN| = \sqrt{a^2 - (x - y)^2}$ . Пусть  $\varphi$  — угол, образованный  $AB$  с  $O_1O_2$ ,  $L$  — точка пересечения  $AB$  и  $O_1O_2$ . Имеем  $|O_1L| = \frac{xa}{x + y} = \frac{xa}{2R - a}$ ,  $\sin \varphi = \frac{x}{|O_1L|} = \frac{2R - a}{a}$ ,  $|OL| = |x + |O_1L|| - R = \frac{R}{2R - a} |2x + a - 2R| = \frac{R}{2R - a} |x - y|$ ,  $|AB| = 2\sqrt{R^2 - |OL|^2 \sin^2 \varphi} = \frac{2R}{a} \sqrt{a^2 - (x - y)^2} = \frac{2R}{a} |MN|$ . Ответ:  $\frac{2R}{a}$  (в обоих случаях).

**287.** Угол  $AKB$  равен  $90^\circ$  (см. задачу I.255). Пусть  $R$  — точка пересечения  $BK$  и  $AC$ ,  $Q$  — точка  $BK$  такая, что  $NQ \parallel AC$ . Используя обычные обозначения, будем иметь:  $|AR| = |AB| = c$ ,  $|MR| = c - (p - a) = p - b = |NB|$ ,  $\frac{|MK|}{|KN|} = \frac{|MR|}{|QN|} = \frac{|CB|}{|RC|} = \frac{a}{b - c}$  (считаем  $b > c$ ). Поскольку  $|MN| = 2(p - c) \sin \frac{\alpha}{2}$ , то  $|MK| = a \sin \frac{\alpha}{2}$ . Аналогично для

других отрезков. Искомый треугольник подобен треугольнику  $ABC$  с коэффициентом подобия  $\sin(\alpha/2)$ . Его площадь равна  $S \cdot \sin^2(\alpha/2)$ .

**288.** Пусть  $|AM| = x$ ,  $|CN| = y$ ,  $x + y = a$ ,  $a$  — сторона квадрата. Обозначим через  $E$  и  $F$  точки пересечения  $MD$  и  $DN$  с  $AC$ . Отрезки  $|AE|$ ,  $|EF|$ ,  $|CF|$  легко вычисляются через  $a, x, y$ , после чего можно проверить равенство  $|EF|^2 = |AE|^2 + |FC|^2 - |AE| \cdot |FC|$ .

**289.** Пусть  $P$  — точка пересечения прямой  $DE$  с  $AB$ ,  $K$  — точка на  $AB$  такая, что  $KD \parallel AC$ ,  $\triangle AKD$  — равнобедренный ( $\angle KDA = \angle DAC = \angle DAK$ ). Значит,  $KD$  — медиана в прямоугольном треугольнике и  $|MN| = \frac{1}{2}|KD| = \frac{1}{4}|AP| = \frac{1}{4}|AE| = \frac{1}{4}a$ .

**290.** Пусть второй точкой пересечения окружностей, описанных около  $\triangle ABC$  и  $\triangle AB_1C_1$ , будет  $A_1$ . Из условия следует, что  $|BB_1| = |CC_1|$ , кроме того,  $\angle ABA_1 = \angle ACA_1$  и  $\angle AB_1A_1 = \angle AC_1A_1$ . Следовательно,  $\triangle A_1BB_1 = \triangle A_1CC_1$ . Значит,  $|A_1B| = |A_1C|$ . Пусть  $\angle ABC = \beta$ ,  $\angle ACB = \gamma$ ,  $\angle ABA_1 = \angle ACA_1 = \varphi$ . Так как  $\triangle A_1BC$  равнобедренный, то  $\angle A_1BC = \angle A_1CB$ , т. е.  $\beta + \varphi = \gamma - \varphi$ ,  $\varphi = \frac{1}{2}(\gamma - \beta)$  и, если радиус окружности, описанной около  $\triangle ABC$ , равен  $R$ , то  $|AA_1| = 2R \sin \frac{\gamma - \beta}{2}$ ; но  $|AB| - |AC| = 2R(\sin \gamma - \sin \beta) = 4R \sin \frac{\gamma - \beta}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} = 2|AA_1| \sin \frac{\alpha}{2}$ ; следовательно,  $|AA_1| = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$ .

**291.** Заметим, что точки  $A, O, M, B$  лежат на одной окружности ( $\angle AMB$  измеряется полусуммой дуги  $AB$  и дуги, симметричной  $AB$  относительно  $OC$ , т. е.  $\angle AMB = \angle AOB$ ). Далее на  $AM$  отложим отрезок  $MK$ , равный  $MB$ ; тогда  $\triangle AKB$  подобен  $\triangle OMB$ . Ответ:  $|AB| = 2a$ .

**292.** Пусть  $|AB| = 2r$ ,  $|BC| = 2R$ ,  $O_1$  — середина  $AB$ ,  $O_2$  — середина  $BC$ ,  $O_3$  — середина  $AC$ ,  $O$  — центр четвертой окружности, радиус которой  $x$ . Из условия следует, что  $|O_1O_3| = R$ ,  $|O_2O_3| = r$ ,  $|O_1O| = r + x$ ,  $|O_2O| = R + x$ ,  $|O_3O| = R + r - x$ . Приравнявая выражения для площадей треугольников  $O_1OO_3$  и  $O_1OO_2$ , полученные по формуле Герона и как полупроизведение соответствующего основания на высоту, получим два уравнения:

$$\begin{cases} \sqrt{(R+r)r(R-x)}x = \frac{1}{2}Rd, \\ \sqrt{(R+r+x)Rrx} = \frac{1}{2}(R+r)d. \end{cases}$$

Возводя каждое из них в квадрат и вычитая одно из другого, найдем, что  $x = d/2$ . Ответ:  $d/2$ .

**293.** Пусть  $P$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $N$  на прямую  $MB$ , тогда  $|MP| = R \cos \alpha$ ; следовательно,  $|MP|$  равно расстоянию от центра  $O$  до  $AB$ ; но расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот вдвое больше, чем расстояние от центра описанного круга до противоположной стороны (задача I.20), т. е.

$|MP| = \frac{1}{2}|MK|$ . Отсюда следует, что если  $M$  находится на большей



из дуг, т. е.  $\angle AMB = \alpha$ , то  $|NK| = R$ ; если же  $\angle AMB = 180^\circ - \alpha$  (т. е.  $M$  — на меньшей дуге окружности), то  $|NK|^2 = R^2(1 + 8 \cos^2 \alpha)$ .  
 Ответ:  $|NK| = R$ , если  $M$  — на большей дуге окружности;  $|NK| = R \sqrt{1 + 8 \cos^2 \alpha}$ , если  $M$  — на меньшей дуге окружности.

294. Пусть  $ABC$  — данный треугольник,  $CD$  — высота,  $O_1$  и  $O_2$  — центры окружностей, вписанных в  $\triangle ACD$  и  $\triangle BDC$ ,  $K$  и  $L$  — точки пересечения прямых  $DO_1$  и  $DO_2$  с  $AC$  и  $CB$ . Так как  $\triangle ADC$  подобен  $\triangle CDB$ , а  $KD$  и  $LD$  — биссектрисы прямых углов этих треугольников,

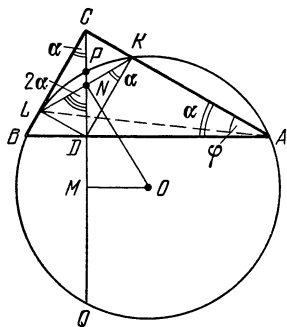


Рис. 13

то  $O_1$  и  $O_2$  делят соответственно  $KD$  и  $LD$  в одинаковом отношении. Значит,  $KL \parallel O_1O_2$ . Но четырехугольник  $CKDL$  — вписанный ( $\angle KCL = \angle KDL = 90^\circ$ ). Следовательно,  $\angle CKL = \angle CDL = \pi/4$ ,  $\angle CLK = \angle CDK = \pi/4$ . Таким образом, прямая  $O_1O_2$  образует с катетами углы в  $\pi/4$ . Если  $M$  и  $N$  — точки пересечения  $O_1O_2$  с  $CB$  и  $AC$ , то  $\triangle CMO_2 = \triangle CDO_2$  ( $CO_2$  — общая,  $\angle O_2CD = \angle O_2CM$ ,  $\angle CDO_2 = \angle CMO_2$ ). Значит,  $|CM| = |NC| = h$ . Ответ: углы треугольника равны  $\pi/4$ ,  $\pi/4$ ,  $\pi/2$ , а площадь —  $h^2/2$ .

295. Обозначения понятны из рис. 13.  $CKDL$  — прямоугольник. Поскольку

$\angle LKA = 90^\circ + \alpha$ ,  $\angle LBA = 90^\circ - \alpha$ , то четырехугольник  $BLKA$  — вписанный,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|LC|}{|CA|} = \frac{h \cos \alpha}{\frac{h}{\sin \alpha}} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha. \quad (1)$$

Если  $R$  — радиус окружности, то

$$R = \frac{|KL|}{2 \sin \varphi} = \frac{h}{2 \sin \varphi}. \quad (2)$$

Поскольку  $\angle LOK = 2\varphi$ , то  $|ON| = R \cos \varphi = \frac{h}{2 \operatorname{tg} \varphi} = \frac{h}{\sin 2\alpha}$  (использо-

вались равенства (1) и (2)),  $|OM| = |ON| \sin(90^\circ - 2\alpha) = h \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} =$

$= h \operatorname{ctg} 2\alpha$ , и, наконец получим выражение  $\frac{1}{2} |PQ| = |QM| =$

$$= \sqrt{R^2 - |OM|^2} = \sqrt{\frac{h^2}{4 \sin^2 \varphi} - h^2 \operatorname{ctg}^2 2\alpha} = h \sqrt{\frac{1}{4} (1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi) - \operatorname{ctg}^2 2\alpha} =$$

$$= h \sqrt{\frac{1}{4} \left( 1 + \frac{4}{\sin^2 2\alpha} \right) - \operatorname{ctg}^2 2\alpha} = \frac{h\sqrt{5}}{2}, \quad |PQ| = h\sqrt{5}. \text{ Если теперь от-}$$

резки  $|PD|$  и  $|DQ|$  хорды обозначить через  $x$  и  $y$ , то  $x + y = h\sqrt{5}$ ,  $xy =$

$$= \frac{h^2}{2}, \text{ откуда найдем, что искомые отрезки хорды будут равны}$$

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{2} h, \quad \frac{\sqrt{5} - 1}{2} h.$$

**296.** Пусть (рис. 14)  $P$  и  $Q$  — точки касания касательных, проведенных из  $E$ . Докажем, что  $|EP| = |EQ| = |BD|$ . В самом деле,  $|EP|^2 = (|ED| + |DC|)(|ED| - |DC|) = |ED|^2 - |DC|^2 = |BC|^2 - |DC|^2 = |BD|^2$  (по условию  $|ED| = |BC|$ ). Обозначим:  $|KN| = x$ ,  $|PN| = |NA| = y$ ,  $|EQ| = |EP| = |BD| = z$ . Тогда

$|KE| = x + y - z$ . Имеем:  $S_{KEN} =$

$$= \frac{1}{2} x (2R - z); \text{ с другой стороны,}$$

$$S_{KEN} = S_{KON} + S_{KOE} - S_{EON} =$$

$$= \frac{1}{2} R (x + x + y - z - y - z) =$$

$$= R (x - z). \quad \text{Таким образом,}$$

$$\frac{1}{2} x (2R - z) = R (x - z), \quad x = 2R.$$

О т в е т:  $2R$ .

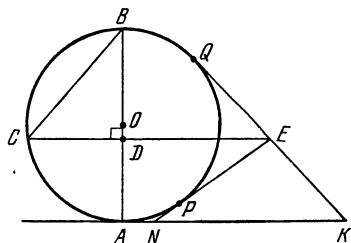


Рис. 14

**297.** Найдем сначала  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{|AO|}{|OC|}$ . Обозначим:  $\angle C = \beta$ . Имеем:

$$\frac{|AO|}{|OC|} = \frac{S_{ABD}}{S_{BDC}} = \frac{\frac{1}{2} ab \sin \alpha}{\frac{1}{2} (p-a)(p-b) \sin \beta}. \quad (1)$$

Но по теореме косинусов  $a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = (p-a)^2 + (p-b)^2 - 2(p-a)(p-b) \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{p(p-a-b) + ab \cos \alpha}{(p-a)(p-b)}$ , откуда

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{(1 - \cos \beta)(1 + \cos \beta)} = \\ &= \frac{\sqrt{ab(1 - \cos \alpha)(2p^2 - 2ap - 2bp + ab + ab \cos \alpha)}}{(p-a)(p-b)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Если  $\alpha \rightarrow 0$ , то  $\cos \alpha \rightarrow 1$ ; следовательно,  $\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \cos \alpha}} = \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \rightarrow \sqrt{2}$

при  $\alpha \rightarrow 0$ . Получим из (1), (2) с учетом последнего замечания

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{|AO|}{|OC|} &= \sqrt{\frac{ab}{(p-a)(p-b)}}. \quad \text{Поскольку } |AC| \rightarrow p, \quad \text{то } \lim_{\alpha \rightarrow 0} |AO| = \\ &= \frac{p \sqrt{ab}}{\sqrt{ab} + \sqrt{(p-a)(p-b)}}. \end{aligned}$$

## II. Избранные задачи и теоремы планиметрии

**1.** Докажите, что если  $D$  — проекция  $M$  на  $AB$ , то  $|AD|^2 - |DB|^2 = |AM|^2 - |MB|^2$ .

**2.** Если бы такая точка нашлась (обозначим ее через  $N$ ), то прямая  $MN$  была бы перпендикулярна всем трем сторонам треугольника.

**3.** Если  $M$  — точка пересечения перпендикуляров, опущенных из  $A_1$  и  $B_1$  на  $BC$  и  $AC$ , то (см. задачу II.1)  $|MB|^2 - |MC|^2 = |A_1B|^2 - |A_1C|^2$ ,  $|MC|^2 - |MA|^2 = |B_1C|^2 - |B_1A|^2$ ; складывая эти равенства

и учитывая условия задачи, получим, что  $|MB|^2 - |MA|^2 = |C_1B|^2 - |C_1A|^2$ , т. е.  $M$  лежит на перпендикуляре, проведенном к  $AB$  через  $C_1$ .

4. Из результата задачи II.3 следует, что условие того, чтобы перпендикуляры, опущенные из  $A_1, B_1, C_1$  на стороны  $BC, CA$  и  $AB$  пересекались в одной точке, такое же, как и условие пересечения в одной точке перпендикуляров, опущенных из  $A, B$  и  $C$  на  $B_1C_1, C_1A_1$  и  $A_1B_1$ .

5. Заметим, что перпендикуляры, опущенные из  $A_1, B_1, C_1$  на  $BC, CA, AB$  соответственно, пересекаются в точке  $D$ , затем воспользуемся результатом задачи II.4.

6. В задаче II.7 доказывается более общий факт. Из рассуждений задачи II.7 будет следовать, что центр окружности расположен на прямой  $AB$ .

7. Введем прямоугольную систему координат. Если координаты точек  $A_1, A_2, \dots, A_n - (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , точки  $M - (x, y)$ , то наше геометрическое место точек будет задаваться уравнением  $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$ , где  $a = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ ; отсюда и следует наше утверждение.

8. Если  $B$  — точка касания,  $O$  — центр данной окружности, то  $|OM|^2 - |AM|^2 = |OM|^2 - |BM|^2 = |OB|^2 = R^2$ . Значит,  $M$  лежит на прямой, перпендикулярной  $OA$  (см. задачу II.1).

9. Условие, определяющее множество точек  $M$ , эквивалентно условию  $|AM|^2 - k^2|BM|^2 = 0$ , т. е. это есть окружность (см. задачу II.7). Эта окружность называется *окружностью Аполлония*; ее центр, как легко убедиться, лежит на прямой  $AB$ .

10. Поскольку  $MB$  является биссектрисой угла  $AMC$ , то  $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|AB|}{|BC|}$ . Следовательно, биссектриса внешнего угла по отношению к углу  $AMC$  пересекает прямую  $AC$  в постоянной точке  $K$ :  $\frac{|AK|}{|KC|} = \frac{|AB|}{|BC|}$ , и искомое множество точек  $M$  есть дуга окружности, построенной на  $BK$  как на диаметре, заключенная между прямыми, перпендикулярными отрезку  $AC$  и проходящими через точки  $A$  и  $C$ .

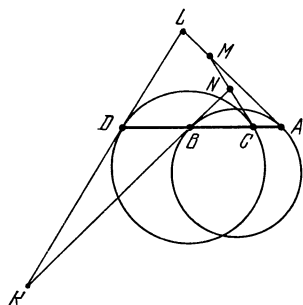


Рис. 15

11. Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры данных окружностей,  $r_1$  и  $r_2$  — их радиусы,  $M$  — точка искомого множества,  $MA_1$  и  $MA_2$  — касательные. По условию  $|MA_1| = k|MA_2|$ . Следовательно,  $|MO_1|^2 - k^2|MO_2|^2 = r_1^2 - k^2r_2^2$ . Значит (см. задачу II.6), искомое множество точек  $M$  при  $k \neq 1$  есть окружность с центром на прямой  $O_1O_2$ , при  $k = 1$  искомое множество есть прямая, перпендикулярная  $O_1O_2$ .

12. Пусть (рис. 15)  $K$  и  $L$  — точки пересечения касательной ко второй

окружности, проходящей через  $D$ , с касательными к первой, проходящими через  $B$  и  $A$ , а  $M$  и  $N$  — другие две точки. Легко видеть, что  $\angle DKB = \angle CMA$  (каждый из этих углов равен половине разности углов, соответствующих дугам  $AB$  и  $CD$ ). Поэтому (на нашем рисунке)  $\angle LMN + \angle LKN = 180^\circ$ . Следовательно, четырехугольник  $KLMN$  —

вписанный. Далее имеем: 
$$\frac{|DK|}{|KB|} = \frac{\sin \angle DBK}{\sin \angle BDK} = \frac{\sin \frac{1}{2} \cup AB}{\sin \frac{1}{2} \cup DC}.$$
 Анало-

гично находятся отношения длин касательных, проведенных через точки  $L$ ,  $M$  и  $N$ . Все эти отношения равны между собой; значит, центр окружности, описанной около  $KLMN$ , лежит на прямой, проходящей через центры данных окружностей (см. задачу II.6).

**13.** Выразив расстояния от вершин треугольника до точек касания, проверьте выполнение условия задачи II.3.

**14.** Пусть  $|AM_1| : |BM_1| : |CM_1| = p : q : r$ . Тогда множество точек  $M$  таких, что  $(r^2 - q^2)|AM|^2 + (p^2 - r^2)|BM|^2 + (q^2 - p^2)|CM|^2 = 0$ , есть прямая линия, проходящая через  $M_1$ ,  $M_2$  и центр описанного около  $\triangle ABC$  круга (см. задачу II.7).

**15.** Точки  $M_1$  и  $M_2$  принадлежат множеству точек  $M$ , для которых  $5|MA|^2 - 8|MB|^2 + 3|MC|^2 = 0$ . Это множество есть прямая линия, и, очевидно, центр описанного круга удовлетворяет условию, определяющему это множество (см. задачу II.7).

**16.** Пусть  $|AA_1| = a$ ,  $|BB_1| = b$ ,  $|CC_1| = c$ ,  $|A_1B_1| = x$ ,  $|B_1C_1| = y$ ,  $|C_1A_1| = z$ . Тогда  $|AB_1|^2 = a^2 + x^2$ ,  $|B_1C|^2 = c^2 + y^2$  и т. д. Теперь легко проверить условие задачи II.3.

**17.** Пусть  $|AD| = x$ ,  $|BD| = y$ ,  $|CD| = z$ ,  $|AB| = a$ . Обозначим через  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  точки касания окружностей, вписанных в треугольники  $BCD$ ,  $CAD$ ,  $ABD$  со сторонами  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ . Перпендикуляры, проведенные через точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  к сторонам  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  совпадают с перпендикулярами, восставленными к тем же сторонам в точках  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ .

Но  $|BA_2| = \frac{a+y-z}{2}$ ,  $|A_2C| = \frac{a+z-y}{2}$ ; аналогично находятся  $|AC_2|$ ,  $|C_2B|$ ,  $|AB_2|$ ,  $|B_2C|$ . Теперь легко проверить условие задачи II.3.

**18.** Примените условие задачи II.3, взяв в качестве точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  центры окружностей, а в качестве точек  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  — по одной из точек пересечения окружностей ( $A_1$  — одна из точек пересечения окружностей с центрами  $B$  и  $C$  и т. д.).

**19.** Возьмем третью окружность с диаметром  $BC$ . Общими хордами 1-й и 3-й, а также 2-й и 3-й окружностей являются высоты треугольника, опущенные из вершин  $B$  и  $C$ . Следовательно (см. задачу II.18), общая хорда данных окружностей также проходит через точку пересечения высот треугольника  $ABC$ .

**20.** Пусть  $O$  — центр данной окружности,  $R$  — ее радиус,  $MC$  — касательная к ней. Имеем:  $|MO|^2 - |MN|^2 = |MO|^2 - |MB| \cdot |MA| = |MO|^2 - |MC|^2 = R^2$ , т. е. точка  $M$  лежит на прямой, перпендикулярной прямой  $ON$  (см. задачу II.1). Легко показать, что все точки этой прямой принадлежат нашему множеству.

21. Пусть  $O$  — центр окружности,  $r$  — радиус окружности,  $|OA| = a$ ,  $BC$  — некоторая хорда, проходящая через  $A$ ,  $M$  — точка пересечения касательных. Тогда

$$|OM|^2 = |BM|^2 + r^2,$$

$$\begin{aligned} |AM|^2 &= |BM|^2 - \frac{1}{4}|BC|^2 + \left(\frac{1}{2}|BC| - |BA|\right)^2 = \\ &= |BM|^2 - |BC| \cdot |BA| + |BA|^2 = \\ &= |BM|^2 - |BA| \cdot |AC| = |BM|^2 - r^2 + a^2. \end{aligned}$$

Таким образом,  $|OM|^2 - |AM|^2 = 2r^2 - a^2$ , т. е. (см. задачу II.1) искомое множество точек есть прямая, перпендикулярная  $OA$ . Эта прямая называется *полярной точки  $A$  относительно данной окружности*.

22. Покажите, что если  $M_1$  и  $M_2$  — две различные точки, принадлежащие нашему множеству, то любая точка  $M$  отрезка прямой  $M_1M_2$  внутри треугольника также принадлежит этому множеству. Для этого, обозначив через  $x_1, y_1, z_1$  расстояния от  $M_1$  до сторон треугольника, через  $x_2, y_2, z_2$  — расстояния от  $M_2$ , можем выразить расстояния  $x, y, z$  от  $M$  до сторон через эти величины и расстояния между  $M_1, M_2, M$ . Так, например, если  $|M_1M| = k|M_1M_2|$  и направления  $M_1M$  и  $M_1M_2$  совпадают, то  $x = (1-k)x_1 + kx_2, y = (1-k)y_1 + ky_2, z = (1-k)z_1 + kz_2$ . Отсюда следует, что если равенство выполняется для трех точек внутри треугольника, не лежащих на одной прямой, то оно будет выполняться для всех точек треугольника. **З а м е ч а н и е.** Утверждение задачи останется верным для произвольного выпуклого многоугольника. Более того, можно рассматривать все точки плоскости, но при этом расстояния до прямой от точек, расположенных по разные стороны от нее, должны браться с противоположными знаками.

23. Для того чтобы расстояния  $x, y, z$  были сторонами треугольника, необходимо и достаточно выполнения неравенств  $x < y + z, y < z + x, z < x + y$ . Но множество точек, для которых, например,  $x = y + z$  есть отрезок с концами в основаниях биссектрис (в основании биссектрисы два расстояния равны, а третье равно нулю, следовательно, равенство выполняется; а из предыдущей задачи следует, что это равенство выполняется для всех точек отрезка). Ответ: искомое геометрическое место состоит из точек, расположенных внутри треугольника с вершинами в основаниях биссектрис.

24. Поскольку перпендикуляры, опущенные из  $A_2, B_2$  и  $C_2$  соответственно на  $B_1C_1, C_1A_1$  и  $A_1B_1$ , пересекаются в одной точке, то (задача II.4) и перпендикуляры, опущенные из  $A_1, B_1$  и  $C_1$  на  $B_2C_2, C_2A_2$  и  $A_2B_2$ , также пересекаются в одной точке.

25. Обозначим через  $a_1$  и  $a_2$  расстояния от  $A$  до прямых  $l_2$  и  $l_3$  соответственно,  $b_1$  и  $b_2$  — расстояния от  $B$  до прямых  $l_3$  и  $l_1$  соответственно,  $c_1$  и  $c_2$  — расстояния от  $C$  до прямых  $l_1$  и  $l_2$  соответственно,  $x, y, z$  — расстояния от  $A_1, B_1$  и  $C_1$  соответственно до  $l$ . Для того, чтобы перпендикуляры, опущенные из  $A, B$  и  $C$  на  $B_1C_1, C_1A_1$  и  $A_1B_1$  соответственно, пересекались в одной точке, необходимо и достаточно выполнения равенства (задача II.3)  $|AB_1|^2 - |B_1C|^2 + |CA_1|^2 - |A_1B|^2 + |BC_1|^2 - |C_1A|^2 = 0$ , или  $(a_1^2 + y^2) - (c_2^2 + y^2) + (c_1^2 + x^2) - (b_2^2 + x^2) + (b_1^2 + z^2) - (a_2^2 + z^2) = 0$ , что приводит к условию  $a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 - b_2^2 + c_1^2 - c_2^2 = 0$ , не зависящему от  $x, y, z$ .

26. Нам достаточно проверить выполнение условия (задача II.3)  $|AB_2|^2 - |B_2C|^2 + |CA_2|^2 - |A_2B|^2 + |BC_2|^2 - |C_2A|^2 = 0$ . Заметим, что треугольники  $BB_2C_1$  и  $AA_2C_1$  подобны, значит,  $|AC_1| \cdot |C_1B_2| = |BC_1| \cdot |C_1A_2|$ , кроме того,  $\angle AC_1B_2 = \angle BC_1A_2$ , следовательно,  $|AB_2|^2 - |BA_2|^2 = (|AC_1|^2 - |C_1B|^2) + (|C_1B_2|^2 - |C_1A_2|^2)$ . Записав соответствующие равенства для  $|CA_2|^2 - |AC_2|^2$  и  $|BC_2|^2 - |CB_2|^2$  и сложив их, получим, что разности, стоящие в первых скобках, в сумме дадут нуль (применяем условие задачи II.3 к треугольникам  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ ; получим нуль, поскольку высоты пересекаются в одной точке). Нетрудно доказать, что  $AA_2$ ,  $BB_2$  и  $CC_2$  проходят через центр описанной около  $ABC$  окружности, т. е. сумма разностей во вторых скобках тоже равна нулю.

32. Проведем через  $K$  и  $L$  прямые, параллельные  $BC$ , до пересечения с медианой  $AD$  в точках  $N$  и  $S$ . Пусть  $|AD| = 3a$ ,  $|MN| = xa$ ,  $|MS| = ya$ . Поскольку  $\frac{|LS|}{|NK|} = \frac{|AS|}{|AN|}$ ,  $\frac{|LS|}{|NK|} = \frac{|MS|}{|MN|}$ , то  $\frac{|AS|}{|AN|} = \frac{|MS|}{|MN|}$ ,  $\frac{(2+y)a}{(2-x)a} = \frac{y}{x}$ ,  $y = \frac{x}{1-x}$ . Равенство  $\frac{1}{|MK|} = \frac{1}{|ML|} + \frac{1}{|MP|}$  эквивалентно равенству  $\frac{1}{|MN|} = \frac{1}{|MS|} + \frac{1}{|MD|}$ ,  $\frac{1}{ax} = \frac{1}{ay} + \frac{1}{a}$ . Подставляя  $y = \frac{x}{1-x}$ , получим верное равенство.

34. Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$ ; воспользуемся подобием соответствующих треугольников, получим  $\frac{|OK|}{|OC|} = \frac{|OK|}{|OB|} \cdot \frac{|OB|}{|OC|} = \frac{|OA|}{|OD|} \cdot \frac{|OM|}{|OA|} = \frac{|OM|}{|OD|}$ , что и требовалось.

35. Пусть  $F$  и  $D$  — точки пересечения  $EN$  и  $EM$  соответственно с  $AB$  и  $BC$ . Докажем, что  $\triangle AFN$  и  $\triangle MDC$  подобны. Используя подобия различных треугольников и равенство противоположных сторон параллелограмма, будем иметь:  $\frac{|NF|}{|FA|} = \frac{|NF|}{|FB|} \cdot \frac{|FB|}{|FA|} = \frac{|BD|}{|DM|} \cdot \frac{|ED|}{|FA|} = \frac{|BD|}{|DM|} \cdot \frac{|DC|}{|FE|} = \frac{|BD|}{|DM|} \cdot \frac{|DC|}{|BD|} = \frac{|DC|}{|DM|}$ , т. е.  $\triangle AFN$  подобен  $\triangle MDC$ .

36. Утверждение задачи вытекает из следующих двух фактов.

1) Если на сторонах четырехугольника  $ABCD$  взяты точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  так, что стороны  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  разделены этими точками в одинаковом отношении  $\left(\frac{|BK|}{|KA|} = \frac{|CM|}{|MD|} = \frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|AN|}{|ND|}\right)$ , то и отрезки  $KM$  и  $LN$  своей точкой пересечения  $P$  разделены в том же отношении.

В самом деле, из того, что прямые  $KL$  и  $NM$  параллельны диагонали  $AC$  следует:  $\frac{|KP|}{|PM|} = \frac{|KL|}{|NM|} = \frac{|KL|}{|AC|} \cdot \frac{|AC|}{|NM|} = \frac{|BK|}{|BA|} \cdot \frac{|AD|}{|ND|} = \frac{|BK|}{|BA|} \cdot \frac{|BA|}{|KA|} = \frac{|BK|}{|KA|}$ .

2) Если на сторонах  $AB$  и  $CD$  четырехугольника взяты точки  $K_1$  и  $M_1$  и  $M$  так, что  $\frac{|K_1K|}{|AB|} = \frac{|M_1M|}{|CD|} = \frac{1}{m}$ ,  $|AK_1| = |KB|$ ,  $|DM_1| = |CM|$ , то площадь четырехугольника  $K_1KMM_1$  составляет  $\frac{1}{m}$  часть от площади четырехугольника  $ABCD$ . В самом деле,  $S_{BKC} = \frac{|BK|}{|BA|} S_{ABC}$ ,  $S_{AM_1D} = \frac{|M_1D|}{|CD|} S_{ACD} = \frac{|BK|}{|BA|} S_{ACD}$ . Следовательно,  $S_{AKCM_1} = \left(1 - \frac{|BK|}{|BA|}\right) S_{ABCD} = \frac{|AK|}{|BA|} S_{ABCD}$ . Аналогично  $S_{K_1KMM_1} = \frac{|K_1K|}{|AK|} S_{AKCM_1}$ . Таким образом,  $S_{K_1KMM_1} = \frac{|K_1K|}{|AB|} S_{ABCD} = \frac{1}{m} S$ .

37. Пусть  $K$  — середина  $DB$ ,  $L$  — середина  $AC$ ,  $S_{ANM} = S_{CNM}$  (поскольку  $|AL| = |LC|$ ), точно так же  $S_{BNM} = S_{DMN}$ ; откуда следует утверждение задачи.

38. Если  $M$  — середина  $DC$ ,  $N$  — середина  $BC$ ,  $K$  и  $L$  — точки пересечения  $DN$  соответственно с  $AM$  и  $AB$ , то  $\frac{|KM|}{|AK|} = \frac{|DM|}{|AL|} = \frac{1}{4}$ , т. е.  $|AK| = \frac{4}{5} |AM|$ ; следовательно,  $S_{ADK} = \frac{4}{5} S_{ADM} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} S = \frac{1}{5} S$  ( $S$  — площадь параллелограмма). Таким образом, площадь искомой фигуры будет  $S - 4S_{ADK} = \frac{1}{5} S$ .

39. Пусть  $Q$  — середина  $AD$ ,  $N$  — середина  $BC$ ,  $M$  — середина  $DC$ ,  $K$ ,  $P$ ,  $R$  — точки пересечения  $DN$  и  $AM$ ,  $QC$  и  $DN$ ,  $QC$  и  $AM$ . Тогда  $|DK| = \frac{2}{5} |DN|$ ,  $|DP| = |PN|$ ,  $|QP| = |PC|$ ,  $|QR| = \frac{1}{3} |QC|$ ,  $\frac{S_{RPQ}}{S_{QPD}} = \frac{|RP|}{|QP|} \cdot \frac{|KP|}{|DP|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$ ,  $S_{RPK} = \frac{1}{15} \cdot \frac{S}{8} = \frac{S}{120}$ .

Следовательно, от четырехугольника, рассмотренного в предыдущей задаче, отрезаются четыре треугольника площади  $\frac{S}{120}$ ; таким образом, площадь искомого восьмиугольника будет  $\frac{S}{5} - \frac{4S}{120} = \frac{S}{6}$ .

40. Пусть прямая  $HC$  пересекает  $AB$  и  $LM$  соответственно в точках  $T$  и  $N$ , прямая  $AL$  пересекает  $ED$  в точке  $K$  и прямая  $BM$  пересекает  $PG$  в точке  $P$ . Имеем:  $S_{ACDE} = S_{ACHK} = S_{ATNL}$ ,  $S_{BCFG} = S_{BCHP} = S_{BMNT}$ ; таким образом,  $S_{ACDE} + S_{BCFG} = S_{ABML}$ .

41. Обозначим через  $Q$  площадь пятиугольника,  $s_1$ ,  $s_2$  и  $s_3$  — площади треугольников, прилежащих к одной боковой стороне, к меньшему основанию и к другой боковой стороне;  $x$  — площадь треугольника, заключенного между треугольниками площади  $s_1$  и  $s_2$ ,  $y$  — площадь треугольника, заключенного между треугольниками площади  $s_2$  и  $s_3$ . Тогда  $s_1 + x + s_2 = s_2 + y + s_3 = \frac{1}{2} (x + y + s_2 + Q)$ . Таким образом,  $s_1 + x + s_2 + s_2 + y + s_3 = x + y + s_2 + Q \Rightarrow s_1 + s_2 + s_3 = Q$ .

42. Если  $S$  — площадь параллелограмма, то  $S_{ABK} + S_{KCD} = \frac{1}{2} S$ , с другой стороны,  $S_{DBC} = S_{EKC} + S_{KCD} = \frac{1}{2} S$ , значит,  $S_{ABK} = S_{EKC}$ ; аналогично  $S_{AKD} = S_{KCP}$ ; складывая два последних равенства, получим:  $S_{ABKD} = S_{CEKF}$ .

43. Имеем: 
$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{S_{ACC_1}}{S_{CC_1B}} = \frac{\frac{1}{2} |AC| \cdot |CC_1| \sin \angle ACC_1}{\frac{1}{2} |CC_1| \cdot |CB| \sin \angle O_1CB} =$$
  

$$= \frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{\sin \angle ACC_1}{\sin \angle C_1CB}.$$
 Получив аналогичные равенства для отношений  $\frac{|BA_1|}{|A_1C|}$  и  $\frac{|CB_1|}{|B_1A|}$  и перемножив их, получим требуемое утверждение.

44. Покажем, что если прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке (обозначим ее через  $M$ ), то  $R^* = 1$  (а следовательно, и  $R = 1$ ; см. задачу II.43). По теореме синусов для  $\triangle AMC$  имеем:  $\frac{\sin \angle ACC_1}{\sin \angle A_1AC} =$   

$$= \frac{|AM|}{|MC|}.$$
 Записав аналогичные равенства для треугольников  $AMB$  и  $BMC$  и перемножив их, получим требуемое утверждение. Обратно, если  $R = 1$  и все точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежат на сторонах треугольника (или лишь одна из них), то, проведя прямые  $AA_1$  и  $BB_1$ , обозначим точку их пересечения через  $M_1$ ; пусть прямая  $CM_1$  пересекает  $AB$  в точке  $C_2$ . Учитывая условия задачи и доказанную необходимость условия  $R = 1$ , будем иметь, что  $\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{|AC_2|}{|C_2B|}$ , причем точки  $C_1$  и  $C_2$  лежат одновременно или на отрезке  $AB$  или вне его. Следовательно,  $C_1$  и  $C_2$  совпадают.

45. Пусть  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежат на одной прямой. Проведем через  $C$  прямую, параллельную  $AB$ , и обозначим через  $M$  точку ее пересечения с прямой  $A_1B_1$ . Из подобия соответствующих треугольников получим:  $\frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|BC_1|}{|CM|}$ ,  $\frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|CM|}{|AC_1|}$ . Заменяя соответствующие отношения в выражении  $R$  (см. задачу II.43), получим, что  $R = 1$ . Обратное утверждение доказывается аналогично тому, как это было сделано в задаче II.44 (проведем прямую  $B_1A_1$ , обозначим через  $C_2$  точку ее пересечения с  $AB$  и т. д.).

46. Проверьте, что если для данных прямых  $R^* = 1$ , то и для симметричных будет так же. При этом, если прямая, проходящая, например, через вершину  $A$ , пересекает сторону  $BC$ , то и прямая, ей симметричная относительно биссектрисы угла, также будет пересекать сторону  $BC$  (см. задачи II.43, II.44).

47. Если  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  — середины отрезков  $AO$ ,  $BO$ ,  $CO$  соответственно, то построенные прямые оказываются симметричными прямым  $A_0O$ ,  $B_0O$ ,  $C_0O$  относительно биссектрис треугольника  $A_0B_0C_0$  (см. задачу II.46).



48. а) Пусть прямая  $BM$  пересекает  $AC$  в точке  $B'$ , а прямая  $CK$  пересекает  $AB$  в  $C'$ . Проведем через  $M$  прямую, параллельную  $AC$ , и обозначим через  $P$  и  $Q$  точки ее пересечения соответственно с  $AB$  и  $BC$ .

Очевидно,  $\frac{|AB'|}{|B'C|} = \frac{|PM|}{|MQ|}$ . Проведем через  $K$  прямую, параллельную  $AB$  и обозначив через  $E$  и  $F$  ее точки пересечения соответственно с  $CA$  и  $CB$ , будем иметь:  $\frac{|BC'|}{|C'A|} = \frac{|FK|}{|KE|}$ . Аналогичное построение сделаем для точки  $L$ . Заменяя отношения, входящие в  $R$  (см. задачу II. 43), учтем, что для каждого отрезка в числителе найдется равный ему в знаменателе, например:  $|PM| = |KE|$ .

б) Пусть для определенности прямая  $l$  пересекает отрезки  $C_0A$ ,  $CA_0$  и образует с  $OK$  острый угол  $\varphi$ . Прямая  $A_1L$  делит отрезок  $MK$  в отношении (от точки  $M$ )  $\frac{S_{LMA_1}}{S_{LKA_1}}$ . Аналогично находятся отношения, в

которых делятся стороны  $KL$  и  $LM$  треугольника  $KLM$ . Нам надо доказать, что имеет место равенство  $R = 1$  (см. задачу II. 43). Заменяем отношения отрезков отношением площадей соответствующих треугольников.  $R$  будет содержать в числителе  $S_{LMA_1}$ , а в знаменателе —  $S_{KMC_1}$ .

Докажем, что  $\frac{S_{LMA_1}}{S_{KMC_1}} = \frac{\sin C}{\sin A}$ , где  $A$  и  $C$  — углы треугольника  $ABC$ .

Очевидно, что  $\frac{S_{B_0OA_0}}{S_{B_0OC_0}} = \frac{\sin C}{\sin A}$ . Кроме того,  $\angle A_1B_0A_0 = \angle C_0B_0A_0 + \angle A_1B_0C_0 = 90^\circ - \frac{\angle B}{2} + \varphi$  (это следует из того, что окружность с диаметром  $AO$  проходит через  $B_0$ ,  $C_0$  и  $A_1$ ) и  $\angle B_0A_1O = \angle B_0AO = \frac{\angle A}{2}$ . Точно так же  $\angle B_0C_1O = \frac{\angle C}{2}$  и  $\angle C_1B_0C_0 = \left(90^\circ - \frac{\angle B}{2}\right) + \angle C_1OL = \left(90^\circ - \frac{\angle B}{2}\right) + (180^\circ - \angle C - \angle B_0OC_1) = 90^\circ - \frac{\angle B}{2} + (\angle B_0OA_1 - \angle C) = 90^\circ - \angle B/2 + (180^\circ - \angle A - \angle C - \varphi) = 90^\circ + \angle B/2 - \varphi$ , т. е.  $\sin \angle A_1B_0A_0 = \sin \angle C_1B_0C_0$ . Таким образом,

$$\frac{S_{A_1B_0A_0}}{S_{C_1B_0C_0}} = \frac{|B_0A_1| \cdot |B_0A_0|}{|B_0C_1| \cdot |B_0C_0|} = \frac{\sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}} = \frac{\sin C}{\sin A}.$$

Пусть  $r$  — радиус вписанной окружности,  $|OL| = |OK| = |OM| = a$ . Будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{S_{LMA_1}}{S_{KMC_1}} &= \frac{S_{LOM} + S_{LOMA_1}}{S_{KOM} + S_{KOMC_1}} = \frac{\frac{a^2}{r^2} S_{A_0OB_0} + \frac{a}{r} S_{A_0OB_0A_1}}{\frac{a^2}{r^2} S_{C_0OB_0} + \frac{a}{r} S_{C_0OB_0C_1}} = \\ &= \frac{\frac{a}{r} S_{A_0OB_0} + (S_{A_0B_0A_1} - S_{A_0OB_0})}{\frac{a}{r} S_{C_0OB_0} + (S_{C_0B_0C_1} - S_{C_0OB_0})} = \frac{\left(\frac{a}{r} - 1\right) S_{A_0OB_0} + S_{A_0B_0A_1}}{\left(\frac{a}{r} - 1\right) S_{C_0OB_0} + S_{C_0B_0C_1}} = \frac{\sin C}{\sin A}. \end{aligned}$$

(Последнее равенство следует из того, что  $\frac{S_{A_0OB_0}}{S_{C_0OB_0}} = \frac{S_{A_0B_0A_1}}{S_{C_0B_0C_1}} = \frac{\sin C}{\sin A}$ .)

Точно так же выделим в числителе и знаменателе представления  $R$  еще две пары величин, отношения которых будут соответственно равны  $\frac{\sin A}{\sin B}$  и  $\frac{\sin B}{\sin C}$ . Значит,  $R = 1$ . Остается лишь доказать, что

число точек пересечения прямых  $LA_1$ ,  $KC_1$  и  $MB_1$  соответственно с отрезками  $KM$ ,  $ML$  и  $LK$  — нечетно.

**49.** Рассмотрим треугольник  $ACE$ , через вершины которого проведены прямые  $AD$ ,  $CF$  и  $EB$ . Синусы углов, образованных этими прямыми со сторонами треугольника  $ACE$ , пропорциональны хордам, на которые они опираются; следовательно, условие  $R = 1$  (см. задачу II. 44) эквивалентно условию, данному в задаче.

**50.** Проверьте, что выполняется равенство  $R = 1$  (в пункте б) воспользуйтесь результатом задачи I. 234) и что все три точки лежат на продолжениях сторон треугольника. Таким образом, наше утверждение следует из теоремы Менелая (см. задачу II. 45).

**51.** По свойству секущих, проведенных из внешней точки к окружности, или по свойству отрезков хорд окружности, проходящих через одну точку, будем иметь:  $|BC_1| \cdot |BC_2| = |BA_1| \cdot |BA_2|$ ,  $|CB_1| \cdot |CB_2| = |CA_1| \cdot |CA_2|$ ,  $|AB_1| \cdot |AB_2| = |AC_1| \cdot |AC_2|$ . Теперь легко проверить, что если утверждение теоремы Чевы (равенство  $R = 1$ ) выполняется для точек  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , то оно выполняется и для точек  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ . При этом из утверждения задачи следует, что или все три точки  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  лежат на соответствующих сторонах треугольника, или только одна из них (см. задачу II. 44).

**52.** Записав равенство  $R = 1$  (согласно теоремам Чевы и Менелая — см. задачи II. 44 и II. 45) для точек  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ;  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_2$ ;  $A_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$ ;  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , мы получим, что и для точек  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  выполняется равенство  $R = 1$ . Теперь осталось лишь доказать, что или все три точки  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  лежат на продолжениях сторон треугольника (так будет, если точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  — на сторонах треугольника), или лишь одна находится на продолжении (если на сторонах треугольника одна из точек  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ), и воспользоваться теоремой Менелая (см. задачу II. 45).

**53.** Воспользуйтесь теоремой Менелая (см. задачу II. 45). В качестве вершин данного треугольника возьмите середины сторон треугольника  $ABC$ , на сторонах и продолжении сторон которого лежат рассматриваемые точки.

**54.** Если  $a$  — длина стороны пятиугольника  $MKLPN$ ,  $b$  — длина стороны пятиугольника с одной стороной на  $AB$ ,  $c$  — длина стороны пятиугольника, у которого одна сторона — на  $AC$ , то  $\frac{|BA_1|}{|C_1B|} = \frac{a}{b}$ ,

$\frac{|AC_1|}{|B_1A|} = \frac{b}{c}$ ,  $\frac{|CB_1|}{|A_1C|} = \frac{c}{a}$ . Перемножив эти равенства, найдем, что  $R = 1$ , и воспользуемся теоремой Чевы (задача II. 44).

**55.** Проверьте, что точки  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  и  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  находятся на сторонах треугольника  $O_1O_2O_3$  ( $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  — центры окружностей) или на продолжении этих сторон и отношение расстояний от каж-

дой из этих точек до соответствующих вершин треугольника  $O_1O_2O_3$  равно отношению радиусов соответствующих окружностей. Далее можно воспользоваться теоремой Менелая (см. задачу II.45) для каждой из этих троек точек.

**56.** Утверждение задачи следует из задач II.43, II.44.

**58.** Воспользуемся равенством  $\frac{\sin \angle B_1AA_2}{\sin \angle A_2AC_1} = \frac{|AC_1|}{|AB_1|} \cdot \frac{|B_1A_2|}{|A_2C_1|}$ .

Получив аналогичные равенства для других углов, и перемножив их, получим наше утверждение на основании результатов задач II.43 и II.44.

**59.** Применим теорему Менелая к треугольникам  $ABD$ ,  $BDC$  и  $DCA$  (задача III.45\*, примечание):  $\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BQ}{QD} \cdot \frac{DP}{PA} = -1$ ,  $\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CR}{RD} \times$

$\times \frac{DQ}{QB} = -1$ ,  $\frac{AP}{PD} \cdot \frac{DR}{RC} \cdot \frac{CN}{NA} = -1$  ( $L$ ,  $M$  и  $N$  — точки пересечения соответственно  $AB$  и  $PQ$ ,  $BC$  и  $QR$ ,  $AC$  и  $PR$ ). Перемножив эти равенства, получим  $\frac{CN}{NA} \cdot \frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} = -1$ , т. е. точки  $L$ ,  $M$  и  $N$  — на одной прямой.

**60.** Рассмотрим систему координат, осями которой являются данные прямые (это так называемая «аффинная» система координат). Уравнение прямой в этой системе, как обычно, имеет вид  $ax + by + c = 0$ . Докажем сначала необходимость данного условия. Пусть точка  $N$  имеет координаты  $(u, v)$ , а точка  $M$  —  $(\lambda u, \lambda v)$ , уравнения прямых  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$ ,  $A_4B_4$  будут соответственно иметь вид:  $y - v = k_1(x - u)$ ,  $y - v = k_2(x - u)$ ,  $y - \lambda v = k_3(x - \lambda u)$ ,  $y - \lambda v = k_4(x - \lambda u)$ . Тогда точки  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ , расположенные на оси  $x$ , соответственно будут иметь на этой оси координаты  $u - \frac{1}{k_1}v$ ,  $u - \frac{1}{k_2}v$ ,  $\lambda u - \frac{\lambda}{k_3}v$ ,  $\lambda u - \frac{\lambda}{k_4}v$ , а точки  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$ , расположенные на оси  $y$ , соответственно будут иметь координаты  $v - k_1u$ ,  $v - k_2u$ ,  $\lambda v - k_3\lambda u$ ,  $\lambda v - k_4\lambda u$ . Теперь легко проверить выполнение равенства, данного в условии. Достаточность, как обычно, можно доказать от противного.

**61.** В пунктах а) и в) надо воспользоваться теоремами Чебы и Менелая (задачи II.44\* и II.45\*, примечание). В пункте б), кроме этого, используется результат предыдущей задачи; при этом удобно, как и в предыдущей задаче, рассмотреть аффинную систему координат, в которой осями являются прямые  $AB$  и  $AC$ , а точки  $B$  и  $C$  имеют координаты  $(0; 1)$  и  $(1; 0)$ .

**62.** Обозначим через  $S$  точку пересечения прямых  $A_1M$ ,  $B_1L$  и  $C_1K$ . Применим к треугольникам  $SMK$ ,  $SKL$  и  $SLM$  теорему Менелая (задача II.45\*, примечание), получим  $\frac{KL_1}{L_1M} \cdot \frac{MA_1}{A_1S} \cdot \frac{SC_1}{C_1K} = -1$ ,  $\frac{LM_1}{M_1K} \times$   
 $\times \frac{KC_1}{C_1S} \cdot \frac{SB_1}{B_1L} = -1$ ,  $\frac{MK_1}{K_1L} \cdot \frac{LB_1}{B_1S} \cdot \frac{SA_1}{A_1M} = -1$ . Перемножив эти равенства, получим:

$$\frac{KL_1}{L_1M} \cdot \frac{LM_1}{M_1K} \cdot \frac{MK_1}{K_1L} = -1. \quad (1)$$

Равенство (1) является необходимым и достаточным условием того,

чтобы прямые  $A_1M$ ,  $B_1L$  и  $C_1K$  пересекались в одной точке. Необходимость уже доказана. Достаточность доказывается, как обычно, от противного. (Обозначим через  $S'$  точку пересечения  $A_1M$  и  $B_1L$ , проведем  $S'C_1$ , обозначим через  $K'$  ее точку пересечения с данной прямой и докажем, что  $K$  и  $K'$  совпадают.) Поскольку равенство (1) переходит в себя при замене  $K$ ,  $L$ ,  $M$  на  $K_1$ ,  $L_1$ ,  $M_1$  и наоборот, то утверждение задачи доказано.

**63.** Применяя теорему Чевы (задача II.44\*, примечание) к треугольникам  $ABD$ ,  $BDC$  и  $CDA$ , получим:  $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BF}{FD} \cdot \frac{DE}{EA} = 1$ ,

$$\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CG}{GD} \cdot \frac{DF}{FB} = 1, \quad \frac{CR}{RA} \cdot \frac{AE}{ED} \cdot \frac{DG}{GC} = 1. \text{ Перемножив эти равенства,}$$

получим:  $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$ , т. е. прямые  $AQ$ ,  $BR$  и  $CP$  пересекаются

в одной точке. Обозначим ее через  $N$ . Пусть  $T$  — точка пересечения  $PG$  и  $DN$ . По теореме Менелая (задача II.45\*, примечание) имеем

$$\frac{DT}{TN} \cdot \frac{NP}{PC} \cdot \frac{CG}{GD} = -1, \text{ откуда } \frac{DT}{TN} = -\frac{PC}{NP} \cdot \frac{GD}{CG} = -\frac{CP}{PN} \cdot \frac{GD}{CG}. \text{ Если}$$

$$\frac{AE}{ED} = \alpha, \quad \frac{BF}{FD} = \beta, \quad \frac{CG}{GD} = \gamma, \text{ то } \frac{AP}{PB} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{CR}{RA} = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \frac{CN}{NP} = -\frac{BA}{PB} \cdot \frac{RC}{AR} = \frac{\alpha + \beta}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \frac{CP}{PN} = -\left(1 + \frac{CN}{NP}\right) = -\frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta}.$$

Таким образом,  $\frac{DT}{TN} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$ . В этом же отношении отрезок  $DN$

разделится другими прямыми.

**64.** Рассмотрим сначала предельный случай, когда точка  $N$  находится «в бесконечности»; тогда прямые  $AN$ ,  $BN$  и  $CN$  параллельны прямой  $l$ . Пусть расстояния от точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  до прямой  $l$  равны  $a$ ,  $b$  и  $c$  (для удобства предположим, что  $A$ ,  $B$  и  $C$  — по одну сторону от  $l$ ). Прямые, параллельные  $l$  и проходящие через  $A$ ,  $B$  и  $C$ , пересекают прямые  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$  и  $A_1B_1$  соответственно в точках  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ . Легко видеть, что  $\frac{|A_1C_2|}{|C_2B_1|} = \frac{a+c}{c+b}$ ,  $\frac{|B_1A_2|}{|A_2C_1|} = \frac{b+a}{a+c}$ ,  $\frac{|C_1B_2|}{|B_2A_1|} = \frac{c+b}{b+a}$ . Перемножая эти равенства, получим, что выполняется утверждение теоремы Менелая — задача II.45 (необходимо еще проверить, что на продолжениях сторон треугольника  $A_1B_1C_1$  находится нечетное число точек из  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ ). Значит, точки  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  лежат на одной прямой.

Общий случай можно свести к рассмотренному, если, например, спроектировать заданное расположение треугольников из какой-либо точки пространства на другую плоскость. При этом можно добиться, чтобы симметричность треугольников не нарушалась, а точка  $N$  перешла бы в бесконечность. Можно и не прибегать к пространственным рассмотрениям. Введем систему координат, выбрав за ось  $x$  прямую  $l$  и взяв начало координат в точке  $N$ . Сделаем преобразование  $x' = 1/x$ ,  $y' = y/x$ . При этом точки оси  $x$  ( $y = 0$ ) перейдут в прямую  $y' = 0$ ; точки, симметричные относительно оси  $x$ , перейдут в симметричные относительно прямой  $y' = 0$ ; прямые перейдут в прямые; прямые, проходящие через начало координат, перейдут в прямые, параллельные пря-

мой  $y' = 0$  (это преобразование, по существу, и есть вышеуказанное проектирование). После такого преобразования получим уже рассмотренное расположение.

**65.** Будем считать, что данные прямые параллельны. Этого можно добиться с помощью соответствующего проектирования или преобразования координат (см. решение задачи II.64). Применим к треугольнику  $A_1A_6M$  (рис. 16,  $N'K'$  параллельна данным прямым)

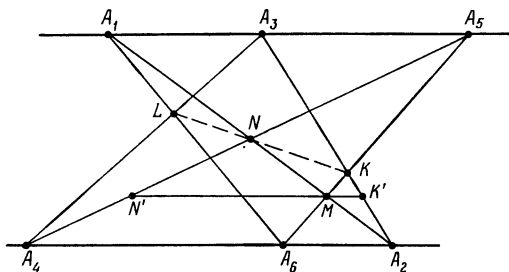


Рис. 16

теорему Менелая (задача II.45). Будем иметь:  $\frac{|A_1L|}{|LA_6|} \cdot \frac{|A_6K|}{|KM|} \cdot \frac{|MN|}{|NA_1|} =$   
 $= \frac{|A_1A_3|}{|A_4A_6|} \cdot \frac{|A_6A_2|}{|K'M|} \cdot \frac{|MN'|}{|A_5A_1|} = \frac{|A_1A_3|}{|K'M|} \cdot \frac{|MN'|}{|A_4A_6|} \cdot \frac{|A_6A_2|}{|A_5A_1|} = \frac{|A_1A_2|}{|A_2M|} \times$   
 $\times \frac{|MA_5|}{|A_5A_6|} \cdot \frac{|A_6A_2|}{|A_5A_1|} = \frac{|A_1M|}{|A_2M|} \cdot \frac{|MA_5|}{|A_5M|} \cdot \frac{|A_2M|}{|MA_1|} = 1$ . Таким образом  
 точки  $L, N$  и  $K$  на одной прямой. Можно было в соответствии с приме-

чанием к задачам II.44 и II.45, рассматривать вместо  $\frac{|A_1L|}{|LA_6|}$  и др. —  
 отношения  $\frac{A_1L}{LA_6}$  и др. В этом случае произведение соответствующих  
 отношений будет равно  $(-1)$ .

**67.** Искомое геометрическое место точек состоит из двух прямых, проходящих через точку, симметричную точке  $A$  относительно прямой  $l$ , и образующих углы в  $60^\circ$  с прямой  $l$ .

**68.** Искомое множество есть дуга  $BC$  окружности, описанной около  $\triangle ABC$ , соответствующая центральному углу в  $120^\circ$ .

**69.** Если  $N$  — точка пересечения прямых  $PQ$  и  $AB$ , то  $\frac{|CN|}{|AN|} =$   
 $= \frac{|PC|}{|AQ|} = \frac{|CB|}{|AC|}$ , т. е.  $N$  — фиксированная точка. Искомое множество  
 есть окружность с диаметром  $CN$ . Если теперь  $M$  — фиксированная  
 точка, то  $D$  лежит на прямой, параллельной прямой  $MN$  и проходящей  
 через такую фиксированную точку  $L$  на прямой  $AB$ , для которой  
 $\frac{|AL|}{|LB|} = \frac{|AN|}{|CN|}$ , причем  $L$  так же расположена относительно отрезка  
 $AB$ , как  $N$  относительно отрезка  $AC$ .

**70.** Обозначим через  $\varphi$  угол между  $BD$  и  $AC$ ;  $S_{APK} = \frac{1}{2} |AK| \times |PD| \sin \varphi$ ,  $S_{BPC} = \frac{1}{2} |BP| \cdot |DC| \sin \varphi = \frac{1}{2} |BP| \cdot |AD| \sin \varphi$ . Поскольку  $S_{APK} = S_{BPC}$ , то  $|AK| \cdot |PD| = |BP| \cdot |AD|$ , или  $\frac{|AK|}{|AD|} \cdot \frac{|PD|}{|BP|} = 1$ , но по теореме Менелая для  $\triangle BDK$  (см. задачу II.45)  $\frac{|AK|}{|AD|} \cdot \frac{|DP|}{|PB|} \times \frac{|BM|}{|MK|} = 1$  ( $M$  — точка пересечения  $AP$  и  $BK$ ), следовательно,  $|BM| = |MK|$ , т. е. искомое геометрическое место точек есть средняя линия  $\triangle ABC$ , параллельная стороне  $AC$  (если же точки  $P$  и  $K$  брать на прямых  $AC$  и  $BD$ , то мы получим прямую, параллельную стороне  $AC$ , проходящую через середины отрезков  $AB$  и  $BC$ ).

**71.** Пусть  $C$  — вершина данного угла,  $\beta$  — его величина. Опустим из  $O$  перпендикуляры  $OK$  и  $OL$  на стороны угла (рис. 17, а). Около

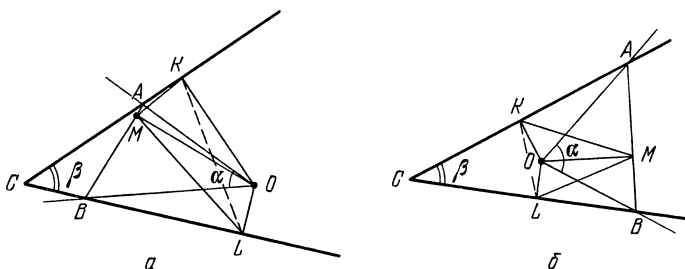


Рис. 17

четырехугольника  $OKAM$  можно описать окружность. Следовательно,  $\angle KMO = \angle KAO$ . Аналогично  $\angle OML = \angle OBL$ . Значит,  $\angle KML = \angle KAO + \angle OBL = \alpha + \beta$ , т. е.  $M$  лежит на дуге окружности, проходящей через  $K$  и  $L$  и вмещающей угол  $\alpha + \beta$ ; при этом все точки этой дуги принадлежат нашему множеству. Если  $\alpha \leq \beta$ , то этим наше множество исчерпывается. Если же  $\alpha > \beta$ , то добавятся точки  $M$  по другую сторону от прямой  $KL$ , для которых  $\angle KML = \alpha - \beta$  (рис. 17, б); при этом множеством точек будет пара дуг, концы которых будут определяться предельными положениями угла  $AOB$ . Если лучи неподвижного угла  $\beta$  и подвижного  $\alpha$  продолжить — вместо углов рассматривать пары прямых, — то искомое множество будет парой окружностей (содержащих обе дуги, о которых говорилось выше).

**72.** Рассмотрим четырехугольник  $DEPM$ ,  $\angle DEM = \angle DPM = 90^\circ$ , следовательно, этот четырехугольник вписанный. Значит,  $\angle DME = \angle DPE = 45^\circ$ . Искомое геометрическое место точек есть прямая  $DC$ .

**73.** Рассмотрим случай, когда точка  $B$  лежит внутри данного угла. Прежде всего заметим, что все получающиеся  $\triangle BCD$  (рис. 18) подобны между собой, поскольку  $\angle BCD = \angle BAD$ ,  $\angle BDC = \angle BAC$ . Поэтому,

если  $N$  – середина  $CD$ , то постоянными будут углы  $BNC$  и  $BND$ . Опишем около  $\triangle BNC$  окружность. Пусть  $K$  – вторая точка пересечения этой окружности с  $AC$ . Поскольку  $\angle BKA = 180^\circ - \angle BNC$ , то точка  $K$  фиксирована. Аналогично, фиксированной будет точка  $L$  – вторая точка пересечения окружности, описанной около  $\triangle BND$ , с прямой  $AD$ .

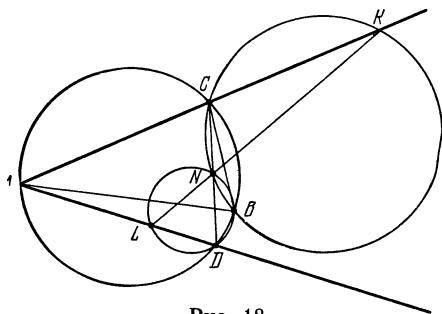


Рис. 18

При этом  $\angle LNK = \angle LNB + \angle BNK = 180^\circ - \angle BDA + \angle BCK = 180^\circ$ , т. е.  $N$  лежит на прямой  $LK$ . Множество точек  $N$  есть отрезок  $LK$ , а геометрическим местом центров тяжести  $\triangle ACD$  будет отрезок, ему параллельный, делящий  $AK$  в отношении  $2:1$  (получается с помощью гомотетии с центром в  $A$  и коэффициентом  $2/3$ ).

74. Если  $O$  – вершина угла,  $ABCD$  – прямоугольник ( $A$  фиксирована), то точки  $A, B, C, D, O$  на одной окружности. Следовательно,  $\angle COA = 90^\circ$ , т. е. точка  $C$  лежит на прямой, перпендикулярной  $OA$  и проходящей через  $O$ .

75. Заметим, что все получающиеся треугольники  $ABC$  подобны между собой. Следовательно, если взять в каждом треугольнике точку  $K$ , делящую сторону  $BC$  в одном и том же отношении, то, поскольку  $\angle AKC$  сохраняет постоянное значение, точка  $K$  будет описывать окружность. Значит, точка  $M$ , делящая  $AK$  в постоянном отношении, также будет описывать окружность, получающуюся из предыдущей с помощью гомотетии с центром в точке  $A$  и с коэффициентом  $k = |AM|/|AK|$ . Это рассуждение используется во всех пунктах: а), б) и в).

76. Пусть  $K$  – середина  $AB$ , а  $m$  – основание перпендикуляра, опущенного из  $K$  на  $AC$ . Все треугольники  $AKM$  подобны между собой (по двум углам), следовательно, будут подобны все треугольники  $ABM$ . Теперь легко получить, что искомое геометрическое место точек есть окружность с хордой  $BC$ , причем углы, опирающиеся на эту хорду, равны углу  $AMB$  или к нему дополнительному. (Меньшая дуга этой окружности расположена по ту же сторону от  $BC$ , что и меньшая дуга исходной окружности.)

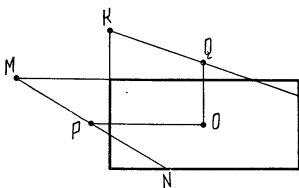


Рис. 19

77. Если  $M, N, L$  и  $K$  – данные точки ( $M$  и  $N$  – на противоположных сторонах прямоугольника,  $L$  и  $K$  также),  $P$  – середина  $MN$ ,  $Q$  – середина  $KL$ ,  $O$  –

точка пересечения диагоналей прямоугольника (рис. 19), то  $\angle POQ = 90^\circ$ . Следовательно, искомым геометрическим местом точек будет окружность, построенная на  $PQ$  как на диаметре.

78. Обозначим радиусы данных окружностей через  $R$  и  $r$  ( $R \geq r$ ), точку касания хорды  $BC$  с меньшей окружностью — через  $D$ ; пусть  $K$  и  $L$  — точки пересечения хорд  $AC$  и  $AB$  с меньшей окружностью и, наконец,  $O$  — центр окружности, вписанной в  $\triangle ABC$ . Поскольку угловые измерения дуг  $AK$  и  $AL$  одинаковы, то  $|AK| = rx$ ,  $|AL| = Rx$ ; отсюда получим  $|DC|^2 = |AC| \cdot |CK| = (R-r)Rx^2$ . Аналогично  $|AB| = Ry$ ,  $|DB|^2 = (R-r)Ry^2$ , следовательно,  $\frac{|CD|}{|DB|} = \frac{x}{y} = \frac{|AC|}{|AB|}$ ,

т. е.  $AD$  — биссектриса угла  $BAC$ . Далее, имеем:  $\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|AC|}{|CD|} = \frac{Rx}{\sqrt{(R-r)Rx}} = \sqrt{\frac{R}{R-r}}$ . Таким образом, искомым геометрическим местом точек будет окружность, касающаяся изнутри двух данных в той же точке  $A$  с радиусом  $\rho = r \frac{|AO|}{|AD|} = \frac{r\sqrt{R}}{\sqrt{R} + \sqrt{R-r}}$ .

79. Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры данных окружностей, прямая  $O_1O_2$  пересекает окружности в точках  $A, B, C, D$  (последовательно). Рассмотрим два случая.

а) Прямоугольник  $KLMN$  расположен таким образом, что противоположные вершины  $K, M$  лежат на одной окружности, а  $L$  и  $N$  — на другой. В этом случае, если  $P$  — точка пересечения диагоналей (рис. 20, а), то  $|O_1P|^2 - |O_2P|^2 = (|O_1K|^2 - |KP|^2) - (|O_2L|^2 - |LP|^2) = |O_1K|^2 - |O_2L|^2 = R_1^2 - R_2^2$ , где  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы окружностей, т. е. точка  $P$  лежит на общей хорде окружностей; при этом исключается середина общей хорды и ее концы, так как в этом случае прямоугольник вырождается.

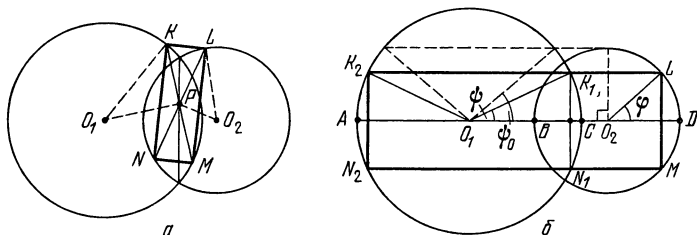


Рис. 20

б) Две соседние вершины прямоугольника  $KLMN$  лежат на одной окружности, а две — на другой. Поскольку перпендикуляры, опущенные из  $O_1$  на  $KN$  и из  $O_2$  на  $LM$  должны делить их пополам, то прямая  $O_1O_2$  является осью симметрии прямоугольника  $KLMN$ .

Пусть  $R_2 < R_1$  и радиус  $O_2L$  образует угол  $\phi$  с линией центров. Проведем через  $L$  прямую, параллельную  $O_1O_2$ . Эта прямая пересечет окружность  $O_1$  в двух точках —  $K_1$  и  $K_2$ , и точке  $L$  будут соответствовать два прямоугольника:  $K_1LMN_1$  и  $K_2LMN_2$  (рис. 20, б). При изме-



нении  $\varphi$  от 0 до  $\pi/2$  угол  $\psi$ , образованный радиусом  $O_1K_1$  с лучом  $O_1O_2$ , меняется от 0 до некоторого значения  $\psi_0$ , при дальнейшем изменении  $\varphi$  (от  $\pi/2$  до  $\pi$ )  $\psi$  уменьшается от  $\psi_0$  до 0. При этом центры прямоугольников  $K_1LMN_1$  опишут отрезок от середины  $CD$  до середины  $BC$ , исключая крайние точки и точку пересечения этого отрезка с общей хордой. Аналогично, центры прямоугольников  $K_2LMN_2$  будут заполнять интервал с концами в серединах  $AB$  и  $AD$  (концы интервала не входят в наше геометрическое место точек).

Если три вершины прямоугольника, а значит, и четвертая лежат на одной окружности, то центр прямоугольника совпадает с центром соответствующей окружности.

Таким образом, искомое геометрическое место точек есть объединение трех интервалов: концы первого – середина  $AB$  и середина  $AD$ , концы второго – середина  $BC$  и середина  $CD$ , концы третьего – точки пересечения окружностей. При этом исключается середина общей хорды.

**80.** Если  $B$  и  $C$  – первая и вторая точки отражения,  $O$  – центр, то  $BO$  – биссектриса угла  $CBA$ . Путь шарика симметричен относительно диаметра, содержащего  $C$ , поэтому  $A$  лежит на этом диаметре. Если  $\angle BCO = \angle CBO = \varphi$ , то  $\angle ABO = \varphi$ ,  $\angle BOA = 2\varphi$ ; применяя теорему синусов к  $\triangle ABO$  ( $|BO| = R$ ,  $|OA| = a$ ), получим:  $\frac{R}{\sin 3\varphi} = \frac{a}{\sin \varphi}$ , отку-

да  $\cos 2\varphi = \frac{R-a}{2a}$ , и при  $a > \frac{R}{3}$  можно найти  $\varphi$ . Ответ: точки, расположенные вне окружности радиуса  $R/3$  с центром в центре бильярда.

**81.** Искомое геометрическое место точек – две прямые, перпендикулярные данным прямым.

**82.** Если прямая  $AB$  не параллельна  $l$ , то существуют две окружности, проходящие через  $A$  и  $B$  и касающиеся  $l$ . Пусть их центры –  $O_1$  и  $O_2$ . Искомое геометрическое место точек есть прямая  $O_1O_2$ , исключая интервал  $(O_1O_2)$ . Если  $AB$  параллельна  $l$ , то искомое геометрическое место точек состоит из одного луча, перпендикулярного  $l$ .

**83. а)** Пусть  $A$  (рис. 21) – вершина некоторого треугольника. Продолжим отрезок  $AM$  за  $M$  на величину  $|MN| = \frac{1}{2}|AM|$ . Точка

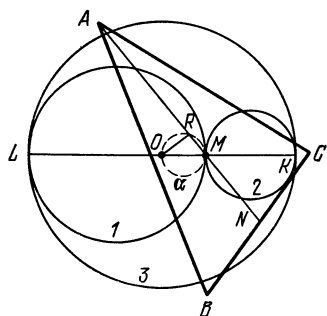


Рис. 21

$N$  является серединой стороны, противоположной вершине  $A$ , следовательно,  $N$  должна находиться внутри описанной окружности, т. е. внутри окружности с центром в  $O$  и радиусом  $|OA|$ . Опустим из  $O$  перпендикуляр  $OR$  на  $AN$ . Должно выполняться неравенство  $|AR| > |RN|$ . Если  $\angle AMO \geq 90^\circ$ , то это неравенство выполняется автоматически. Если же  $\angle AMO < 90^\circ$ , то  $|AM| - |MR| > |MN| + |MR| \Rightarrow |AM| - \frac{1}{2}|AM| > 2|MR| \Rightarrow |AM| > 4|MR|$ . Но  $R$  ле-

жит на окружности  $\alpha$  с диаметром  $OM$ , значит,  $A$  должна быть вне окружности, гомотетичной окружности  $\alpha$  с коэффициентом 4 и центром гомотетии в  $M$ . Далее, точка  $N$  не должна попасть на окружность  $\alpha$ , так как в противном случае сторона треугольника, серединой которого она является, будучи перпендикулярной  $ON$ , лежала бы на прямой  $AN$ , т. е. все вершины треугольника были бы на одной прямой. Следовательно,  $A$  не должна лежать на окружности, гомотетичной  $\alpha$  с центром гомотетии  $M$  и коэффициентом  $-2$ . Таким образом, если мы возьмем на прямой  $OM$  последовательно точки  $L$  и  $K$  так, что  $|LO|:|OM|:|MK|=3:1:2$ , и построим как на диаметре на  $LM$  окружность 1, на  $MK$  — окружность 2, то искомым геометрическим местом точек будут все точки вне окружности 1, исключая точки окружности 2, кроме точки  $K$  (точка  $K$  входит в наше геометрическое место точек).

б) Если  $O$  — центр описанного круга,  $M$  — центр тяжести треугольника, то  $K$  (см. пункт а)) будет точкой пересечения высот треугольника (см. задачу I.20). Но для тупоугольного треугольника расстояние от центра описанного круга до точки пересечения высот больше радиуса описанного круга. Следовательно, вершины тупоугольного треугольника находятся внутри окружности 3, построенной на  $LK$  как на диаметре, вне окружности 1, исключая точки окружности 2 (при этом вершины тупых углов находятся внутри окружности 2).

**84.** Пусть  $ABC$  (рис. 22) — исходный правильный треугольник,  $A_1B_1C_1$  — произвольный треугольник, у которого  $A_1C_1 \parallel AC$ ,  $A_1B_1 \parallel AB$ ,

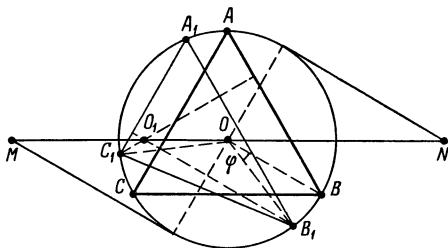


Рис. 22

$O$  — центр круга,  $O_1$  — точка пересечения высот  $\triangle A_1B_1C_1$ . Пусть  $\angle BOB_1 = \varphi$ . Поскольку  $O_1B_1 \parallel OB$ , то  $\angle OB_1O_1 = \varphi$ ; так как  $\angle C_1O_1B_1 = \angle C_1OB_1 = 120^\circ$ , то четырехугольник  $C_1O_1OB_1$  вписан в некоторую окружность, и, значит,  $\angle O_1OC_1 = \angle O_1B_1C_1 = 30^\circ - \varphi$ . Таким образом,  $\angle O_1OB = \varphi + 120^\circ + 30^\circ - \varphi = 150^\circ$ , т. е. прямая  $OO_1$  параллельна  $CB$ . Для того чтобы определить, сколь далеко точка  $O_1$  может «уйти» по этой прямой, заметим, что для определения положения точки  $O_1$  нужно через переменную точку  $B_1$  провести прямую, параллельную  $OB$ , до пересечения с прямой, проходящей через  $O$  параллельно  $CB$ . Наиболее удаленные точки, очевидно, получатся для концов диаметра, перпендикулярного  $OB$ . Таким образом, частью нашего геометрического места точек будет  $MN$  — отрезок прямой, параллельной  $CB$ , длиной  $4R$  с серединой в  $O$ , а все геометрическое место точек — три таких отрезка (концы отрезков исключаются).

85. Если  $ABC$  (рис. 23) — данный треугольник и вершина описанного прямоугольника  $AKLM$  совпадает с  $A$  ( $B$  — на  $KL$ ,  $C$  — на  $LM$ ), то  $L$  принадлежит полуокружности с диаметром  $BC$ , причем углы  $ABL$  и  $ACL$  тупые, т. е. у  $L$  будет два крайних положения:  $L_1$  и  $L_2$ ,  $\angle L_1CA = \angle L_2BA = 90^\circ$ , центр же  $O$  будет описывать дугу, гомотетичную дуге  $L_1L_2$ , с центром гомотетии в  $A$  и коэффициентом  $1/2$ . Ответ: если треугольник остроугольный, то искомое множество есть

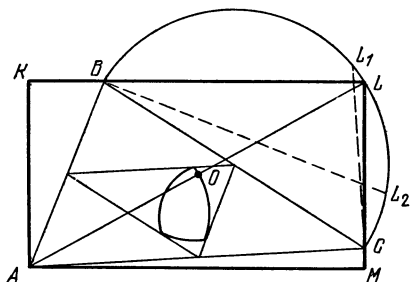


Рис. 23

криволинейный треугольник, образованный дугами полуокружностей, построенных на средних линиях как на диаметрах и обращенных внутрь треугольника из средних линий; если же треугольник не остроугольный, то искомое множество состоит из двух дуг полуокружностей, построенных таким же образом на двух меньших средних линиях.

86. Если (рис. 24) повернуть первый квадрат вокруг точки  $M$  на  $60^\circ$  или по часовой стрелке, или против, то он должен целиком попасть внутрь второго. Обратно, каждому квадрату, расположенному

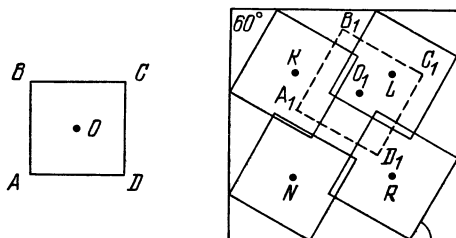


Рис. 24

внутри большего, равному меньшему, стороны которого образуют углы в  $30^\circ$  и  $60^\circ$  со сторонами большего, соответствует точка  $M$ , обладающая нужным свойством. (На рисунке этот квадрат обозначен штриховой линией.) Эта точка будет центром поворота на  $60^\circ$ , переводящего квадрат  $ABCD$  в квадрат  $A_1B_1C_1D_1$ , ее можно получить из  $O_1$  поворотом в нужном направлении на  $60^\circ$  вокруг  $O$ . Рассмотрим крайние положения квадратов  $A_1B_1C_1D_1$  (когда две вершины попадают на стороны большего). Их центры служат вершинами квадрата  $KLRN$ ,

сторона которого соответственно равна  $b - \frac{1}{2}a(\sqrt{3} + 1)$  (стороны квадрата  $KLRN$  параллельны сторонам данных квадратов, центр совпадает с центром большего). Центры другого семейства квадратов, образующих со сторонами большего квадрата углы  $30^\circ$  и  $60^\circ$ , также заполняют квадрат  $KLRN$ . Таким образом, искомое геометрическое место точек состоит из объединения двух квадратов, один из которых получен из квадрата  $KLRN$  поворотом вокруг  $O$  на  $60^\circ$  в одном направлении, другой — поворотом на  $60^\circ$  в противоположном направлении.

Задача имеет решение, если  $b \geq \frac{a}{2}(\sqrt{3} + 1)$  (точки  $P$  и  $Q$  могут быть на границе своих квадратов).

87. Такая точка  $M$  одна — центр тяжести треугольника (точка пересечения медиан). Легко видеть, что в этом случае для любой точки  $N$  на границе треугольника в качестве точки  $P$  можно взять одну из вершин треугольника. Возьмем какую-либо другую точку  $M_1$ . Будем считать, что эта точка находится внутри или на границе  $\triangle AMD$ , где  $M$  — центр тяжести  $\triangle ABC$ ,  $D$  — середина  $AC$ . Проведем через  $M_1$  прямую, параллельную  $BD$ , и в качестве  $N$  возьмем точку пересечения этой прямой с  $AD$ , а через  $M_2$  обозначим ее пересечение с  $AM$ . Очевидно, для любой точки  $P$  внутри или на границе треугольника площадь  $\triangle M_1NP$  не превосходит площади одного из треугольников  $AM_2N$ ,  $M_2NC$ ,  $M_2NB$ . Очевидно также, что  $S_{AM_2N} < S_{AMD} = \frac{1}{6}S$ . Да-

лее, если  $|AD| = |DC| = a$ ,  $|ND| = x$ , то  $\frac{S_{M_2NC}}{S_{MDC}} = \frac{|M_2N|}{|MD|} \cdot \frac{|NC|}{|DC|} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \leq 1$ . Наконец,  $\frac{S_{M_2NB}}{S_{AMD}} = \frac{|M_2N|}{|MD|} \cdot \frac{|ND|}{|AD|} = \frac{(a-x)x}{a^2} < 1$ .

88. Если  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — углы  $\triangle ABC$ , то углы  $\triangle ABI$  равны  $\frac{A}{2}$ ,  $\frac{B}{2}$ ,  $90^\circ + \frac{C}{2}$  (рис. 25); следовательно, искомое геометрическое место точек — пара треугольников, две стороны которых — отрезки прямых, а третья — дуга, являющаяся частью сегмента, построенного на  $AI$  и вмещающего угол  $\alpha/2$ .

89. Восставим к  $BM$  в точке  $M$  перпендикуляр; пусть  $P$  — точка пересечения этого перпендикуляра и перпендикуляра, восстановленного к исходной прямой в точке  $B$ . Покажем, что величина  $|PB|$  постоянна. Пусть  $\angle MBC = \varphi$ ; через  $K$  и  $L$  обозначим основания перпендикуляров, опущенных из  $A$  и  $C$  на  $MB$ . По условию  $\frac{|MK|}{|KA|} + \frac{|LM|}{|LC|} = k$ , но  $|LC| = |BC| \sin \varphi$ ,  $|AK| = |BA| \sin \varphi$ .

Значит,  $\frac{|MK|}{|BA| \sin \varphi} + \frac{|LM|}{|BC| \sin \varphi} = k \Leftrightarrow \frac{|BM| \pm |BK|}{|BA| \sin \varphi} + \frac{|BM| \mp |BL|}{|BC| \sin \varphi} =$

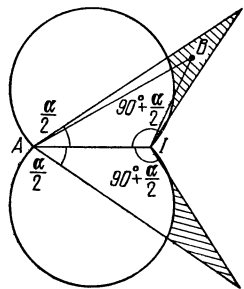


Рис. 25

$$\begin{aligned}
 &= k \Leftrightarrow \frac{|BM|}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{|BA|} + \frac{1}{|BC|} \right) \pm \left( \frac{|BK|}{|BA| \sin \varphi} - \frac{|BL|}{|BC| \sin \varphi} \right) = k \Leftrightarrow \frac{|BM|}{\sin \varphi} = \\
 &= \frac{k |BA| \cdot |BC|}{|BA| + |BC|} \Leftrightarrow PB = \frac{k |BA| \cdot |BC|}{|BA| + |BC|}, \text{ что и требовалось. Следова-} \\
 &\text{тельно, искомое геометрическое место точек — две окружно-} \\
 &\text{сти, касающиеся прямой } AC \text{ в точке } B, \text{ с диаметрами, равными} \\
 &\frac{k |BA| \cdot |BC|}{|BA| + |BC|}.
 \end{aligned}$$

90. Продолжим  $AQ$  за точку  $Q$  и возьмем на этом луче точку  $M$  так, что  $|QM| = \frac{1}{2}|AQ|$ , и точку  $A_1$  так, что  $|MA_1| = |AM|$ ;  $M$  — середина стороны  $BC$  треугольника  $ABC$ ;  $\angle CBA_1 = \angle BCA$ ,  $\angle ABA_1 = 180^\circ - \angle BAC$ .

Следовательно, если мы построим на  $AM$ ,  $MA_1$  и  $AA_1$  как на диаметрах окружности, то искомое геометрическое место точек будет состоять из точек, расположенных вне первых двух и внутри третьей окружностей.

91. Разберите 4 случая: треугольник  $ABC$  — остроугольный, один из углов  $A$ ,  $B$  или  $C$  — тупой. Во всех случаях можно выразить величины углов треугольника  $ABH$  через углы треугольника  $ABC$ .

92. Если концы лучей не совпадают, то искомое геометрическое место точек состоит из частей следующих линий: биссектрис двух углов, образованных прямыми, содержащими данные лучи, срединного перпендикуляра к отрезку, соединяющему концы лучей, и двух парабол (парабола есть геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки и данной прямой). Если концы лучей совпадают, то искомое геометрическое место точек состоит из биссектрисы угла, образованного лучами, и части плоскости внутри угла, образованного перпендикулярами, восставленными в концах лучей.

93. Пусть  $A$  — вершина угла. Можно доказать, что центр окружности, описанной около  $\triangle MON$ , совпадает с точкой пересечения биссектрисы  $AO$  и окружности, описанной около  $AMN$ . Пусть  $\alpha$  — величина угла,  $r$  — радиус окружности,  $K$  — середина  $AO$ . Возьмем на биссектрисе  $AO$  точки  $L$  и  $P$  так, что  $|AL| = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2} \left( 1 + \sin \frac{\alpha}{2} \right)}$ ,  $|AP| = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \sin \frac{\alpha}{2} \right)}$ . Искомое геометрическое место точек состоит из

отрезка  $KL$  (причем  $K$  не входит,  $L$  — входит в это множество) и луча, лежащего на биссектрисе, с началом в  $P$ .

94. Обозначим:  $O_1, O_2$  — центры окружностей,  $r_1, r_2$  — их радиусы,  $M$  — середина  $AB$ ,  $O$  — середина  $O_1O_2$ . Имеем (по формуле длины медианы, задача I.11)  $|O_1M|^2 = \frac{1}{4}(2r_1^2 + 2|O_1B|^2 - |AB|^2)$ ,  $|O_2M|^2 = \frac{1}{4}(2r_2^2 + 2|O_2A|^2 - |AB|^2)$ ,  $|O_1B|^2 = \frac{1}{2}(|O_1O_2|^2 + 4|OB|^2 - 2r_2^2)$ ,  $|O_2A|^2 = \frac{1}{2}(|O_1O_2|^2 + 4|OA|^2 - 2r_1^2)$ . Таким образом,  $|O_1M|^2 -$

$-|O_2M|^2 = r_1^2 - r_2^2$ , т. е. (задача II.1) точки  $M$  расположены на перпендикуляре к  $O_1O_2$ . Если окружности разного радиуса и не пересекаются, то искомое геометрическое место точек состоит из двух отрезков, получающихся следующим образом: надо из отрезка с концами в серединах общих внешних касательных выкинуть точки, расположенные между серединами общих внутренних касательных (если  $M$  — точка отрезка с концами в серединах общих внутренних касательных, то прямая, проходящая через  $M$  перпендикулярно  $OM$ , не пересекает окружности). В остальных случаях (окружности пересекаются или равны) искомое геометрическое место точек — весь отрезок с концами в серединах общих внешних касательных.

95. а) Так как  $\angle FNB = 90^\circ$ ,  $\angle CNM = 135^\circ$ ,  $\angle FNM = 45^\circ$  (предполагаем, что  $|AM| > |MB|$ ), то  $\angle FNC = 90^\circ$  и  $C$ ,  $N$  и  $B$  на одной прямой и т. д.

б) Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник  $ABK$  с гипотенузой  $AB$  ( $K$  по другую сторону от  $AB$ , чем квадраты). Четырехугольник  $ANBK$  — вписанный, следовательно,  $\angle ANK = \angle ABK = 45^\circ$ , т. е.  $NK$  проходит через  $M$ .

Искомое геометрическое место точек есть средняя линия треугольника  $ALB$ , где  $L$  — точка, симметричная точке  $K$  относительно  $AB$ .

96. Пусть  $N$  — точка пересечения срединного перпендикуляра и касательной,  $O$  — центр окружности,  $R$  — ее радиус. Имеем:  $|ON|^2 - |NA|^2 = R^2 + |MN|^2 - |NA|^2 = R^2$ . Таким образом, искомое геометрическое место точек — прямая, перпендикулярная  $OA$  (задача II.1).

97. Если  $O_1$  и  $O_2$  — центры данных окружностей,  $Q_1$  и  $Q_2$  — центры окружностей, описанных около треугольников  $ABC_1$  и  $AB_1C$ , то  $O_1Q_1O_2Q_2$  — параллелограмм. Прямая  $Q_1Q_2$  проходит через середину отрезка  $O_1O_2$  (точка  $D$ ). Вторая точка пересечения окружностей, описанных около треугольников  $ABC_1$  и  $AB_1C$ , — симметрична точке  $A$  относительно прямой  $Q_1Q_2$ . Искомое геометрическое место точек есть окружность с центром в точке  $D$  и радиусом  $|AD|$ .

98. Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры данных окружностей,  $r_1$  и  $r_2$  — их радиусы. Рассмотрим два равнобедренных прямоугольных треугольника с гипотенузой  $O_1O_2 - O_1O_2O$  и  $O_1O_2O'$ . Искомое геометрическое место точек есть два кольца с центрами  $O$  и  $O'$  и радиусами: внешним —

$\frac{\sqrt{2}}{2}(r_1 + r_2)$  и внутренним  $\frac{\sqrt{2}}{2}|r_1 - r_2|$ . Докажем это. Пусть  $M$  — точка на окружности  $O_1$ ,  $N$  — на окружности  $O_2$ . Если  $M$  — фиксирована, а  $N$  пробегает вторую окружность, то вершины прямых углов равнобедренных прямоугольных треугольников описывают две окружности радиуса  $\frac{\sqrt{2}}{2}r_2$ , получающиеся из окружности  $O_2$

с помощью поворота вокруг  $M$  на угол  $45^\circ$  (в одну и в другую сторону) с последующей гомотетией с центром в  $M$  и коэффициентом  $\sqrt{2}/2$ . Пусть  $O_M$  — центр одной из этих окружностей. Точка  $O_M$  получена из  $O_2$  поворотом вокруг  $M$  в соответствующем направлении и гомотетией с центром в  $M$  и коэффициентом  $\sqrt{2}/2$ . Но  $O_M$  можно получить с помощью соответствующего поворота и гомотетии с центром  $O_2$ . Следовательно, когда  $M$  описывает окружность  $O_1$ ,

$O_M$  описывает окружность радиуса  $\frac{\sqrt{2}}{2}r_1$  с центром в  $O$  или  $O'$ .

**99.** Объединение трех построенных параллелограммов представляет собой параллелограмм, описанный около данного треугольника, разделенный на четыре меньших. Нетрудно выразить отношения, в которых каждая из рассматриваемых диагоналей делится другой диагональю, через отрезки сторон большого параллелограмма.

Если параллелограммы являются прямоугольниками, то, параллельно перенеся две из трех рассматриваемых диагоналей, образуем из них треугольник, равный данному; а это означает, что углы между ними или равны соответствующим углам треугольника, или дополняют их до  $180^\circ$ . Искомое геометрическое место точек есть окружность, проходящая через середины сторон данного треугольника.

**100.** Докажем, что  $\frac{|AM|}{|AD|} = |\cos \angle BAC|$ , где  $D$  — точка пересечения  $AM$  с окружностью. Пусть  $O$  — центр окружности,  $P$  — середина  $BC$ ,  $K$  — середина  $AH$ . Треугольники  $DOA$  и  $MKA$  подобны. Значит,  $\frac{|MA|}{|AD|} = \frac{|AK|}{|DO|} = \frac{|OP|}{|OB|} = |\cos \angle BAC|$ . Искомое геометрическое место точек состоит из двух дуг, принадлежащих двум различным окружностям.

**101.** Пусть  $B_0$  и  $C_0$  — середины сторон  $AC$  и  $AB$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  — высоты,  $K$  — середина  $DE$  (рис. 26),  $GK$  и  $C_0N$  перпендикулярны  $AB$ ,  $B_0M$  перпендикулярна  $AC$ . Тогда  $\frac{|ML|}{|NM|} = \frac{|GC_1|}{|C_0C_1|} = \frac{|KP|}{|C_0C_1|} = \frac{|DC|}{|BC|}$  (последнее равенство следует из подобия треугольников  $DCE$  и  $ABC$ ,  $K$ ,  $P$  и  $C_0$ ,  $C_1$  — соответствующие точки в этих треугольниках).

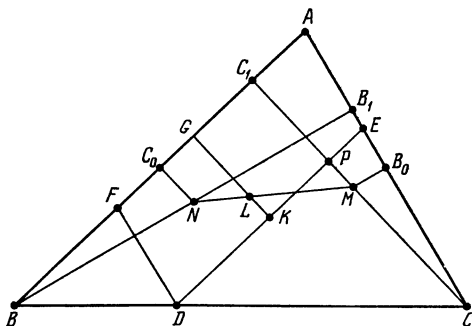


Рис. 26

Точно так же срединный перпендикуляр к  $DF$  пересекает  $MN$  в точке  $L_1$  такой, что  $\frac{|NL_1|}{|NM|} = \frac{|BD|}{|BC|}$ , т. е. точки  $L$  и  $L_1$  совпадают.

Искомым геометрическим местом точек является прямая  $MN$ .

**102.** Очевидно, что любая точка любой высоты треугольника  $ABC$  принадлежит искомому геометрическому месту точек. Покажем, что других точек нет. Возьмем точку  $M$ , не лежащую на высотах треугольника  $ABC$ . Пусть прямая  $BM$  пересекает высоты, опущенные из вершин  $A$  и  $C$  соответственно в точках  $M_1$  и  $M_2$ . Если бы для всех трех точек  $M_1, M_2$  и  $M$  выполнялось условие задачи, то имели бы место равенства  $\angle MAM_1 = \angle MCM_1$ ,  $\angle MAM_2 = \angle MCM_2$  и тогда пять точек  $A, M, M_1, M_2$  и точка  $C$ , симметричная  $C$  относительно прямой  $BM$ , лежали бы на одной окружности, что невозможно.

**103.** Заметим, что если через  $M$  проходит какая-либо прямая  $l$ , обладающая нужным свойством, то существует или прямая  $l_1$ , проходящая через  $M$  и какую-либо вершину треугольника, или прямая  $l_2$ , проходящая через  $M$  перпендикулярно какой-либо стороне треугольника, обладающая этим же свойством. В самом деле. Пусть прямая  $l$  пересекает стороны  $AB$  и  $CB$  треугольника  $ABC$  в точках  $C_0$  и  $A_0$  и точка  $B_1$ , симметричная  $B$  относительно  $l$ , внутри  $\triangle ABC$ . Будем вращать  $l$  вокруг  $M$  так, чтобы  $B_1$  приближалась по дуге соответствующей окружности к  $AB$  или  $BC$  до тех пор, пока точка  $C_0$  или  $B_0$  не совпадет с вершиной  $C$  или  $A$  (получим прямую  $l_1$ ) или  $B_1$  не попадет на соответствующую сторону (получим прямую  $l_2$ ). Обозначим через  $\alpha$  множество точек нашего треугольника, расположенных внутри четырехугольника, ограниченного биссектрисами к меньшей и большей стороне треугольника и перпендикулярами, восстановленными к меньшей и большей стороне в их серединах. (Если данный треугольник — равнобедренный, то  $\alpha$  — пусто. Во всех остальных случаях  $\alpha$  — четырехугольник или пятиугольник.) Искомое геометрическое место точек состоит из всех точек треугольника, исключая внутренние точки  $\alpha$ .

**105.** Имеем:  $|MB|^2 = a^2 + c^2 \cos^2 A = a^2 + c^2 - c^2 \sin^2 A = a^2 + c^2 - a^2 \sin^2 C = c^2 + a^2 \cos^2 C = |NB|^2$ .

**107.** Докажите, что точка, симметричная точек пересечения высот треугольника относительно стороны треугольника, лежит на описанной окружности.

**109.** Пусть  $H$  — точка пересечения высот  $\triangle ABC$ ,  $AD$  — высота,  $K, L, M, N$  — проекции  $D$  на  $AC, CH, HB$  и  $BA$  соответственно. Воспользуйтесь тем, что  $K$  и  $L$  лежат на окружности с диаметром  $CD$ ,  $L$  и  $M$  — на окружности с диаметром  $HD$ ,  $M$  и  $N$  — на окружности с диаметром  $DB$ .

**111.** Докажите, что радиус окружности, описанной около рассматриваемого треугольника, равен радиусу данных окружностей, а эти окружности симметричны описанной окружности относительно сторон треугольника.

**112.** Пусть  $ABCD$  — данный прямоугольник,  $K, L, M$  и  $N$  на прямых  $AB, BC, CD$  и  $DA$  соответственно,  $P_1$  — вторая точка пересечения прямой  $LN$  с описанной около  $ABCD$  окружностью (первая точка —  $P$ ). Тогда  $BP_1 \parallel KN$ ,  $P_1D \parallel LM$  и  $\angle BP_1D = 90^\circ$ . Значит,  $KN \perp LM$ . Кроме того,  $LN \perp KM$ ; таким образом,  $N$  — точка пересечения высот  $\triangle KLM$ . Пусть теперь, для определенности,  $L$  и  $N$  внутри сторон  $BC$  и  $DA$ . Обозначим  $|AB| = a$ ,  $|BC| = b$ ,  $|KP| = x$ ,  $|PN| = y$ .



Прямая  $KN$  делит  $BD$  в отношении  $\frac{(a+y)x}{(b-x)y}$ , считая от вершины  $B$ . В таком же отношении разделит  $BD$  и прямая  $LM$ .

113. Отрезки  $|AP|$ ,  $|BQ|$  и  $|CR|$  можно выразить через стороны треугольника, например:  $|AP| = \frac{bc}{b+c}$ .

114. Пусть  $M$  — середина  $AD$ . Проверьте, что  $|BF|^2 + |FM|^2 = |BM|^2$ .

115. Проведите через  $D$  прямую, перпендикулярную биссектрисе угла  $A$ , обозначьте точки ее пересечения с  $AB$  и  $AC$  через  $K$  и  $M$  и покажите, что  $|AK| = |AM| = \frac{b+c}{2}$ . Поскольку  $|AC_1| = |AB_1| = p - a$ ,  $|AC_2| = |BC_2| = p$  ( $p$  — полупериметр  $\triangle ABC$ ,  $a, b, c$  — его стороны), то точки  $K$  и  $M$  будут серединами отрезков  $C_1C_2$  и  $B_1B_2$ .

116. Докажите, что  $l$  образует с  $AD$  такие же углы, что и прямая  $BC$ , касающаяся нашей окружности. Отсюда следует, что другая касательная к окружности, проходящая через  $D$ , будет параллельна  $l$ .

117. Построим окружность, касающуюся прямых  $MN$ ,  $AC$  и  $BC$  таким образом, чтобы точки касания  $P$  и  $Q$  с прямыми  $AC$  и  $BC$  были вне отрезков  $CM$  и  $CN$  (это будет окружность, вневписанная в треугольник  $MCN$ ). Если  $R$  — точка касания  $MN$  с окружностью, то  $|MP| = |MR|$ ,  $|NQ| = |NR|$ , следовательно,  $|MN| = |MP| + |NQ|$ ; но по условию  $|MN| = |MA| + |NB|$ . Таким образом, одна из точек  $P$  или  $Q$  лежит внутри соответствующей стороны, а другая — на продолжении. При этом  $|CP| = |CQ| = \frac{1}{2}(|CP| + |CQ|) = \frac{1}{2}(|AC| + |CB|)$ , т. е. построенная окружность постоянна для всех прямых.

118. Если  $O$  — центр круга, описанного около  $\triangle ABC$ ,  $D$  — середина  $CB$ ,  $H$  — точка пересечения высот,  $L$  — середина  $AH$ , то  $|AL| = |OD|$  и, поскольку  $AL \parallel OD$ , то  $OL$  делит  $AD$  пополам, т. е.  $L$  симметрична  $O$  относительно середины  $AD$ .

119. Пусть  $BD$  — высота треугольника, причем  $|BD| = R\sqrt{2}$ , где  $R$  — радиус описанного круга,  $K$  и  $M$  — основания перпендикуляров, опущенных из  $D$  на  $AB$  и  $BC$ ,  $O$  — центр описанного круга. Если угол  $C$  — острый, то  $\angle KBO = 90^\circ - \angle C$ . Поскольку четырехугольник  $BMDK$  — вписанный, то  $\angle MKD = \angle DBM = 90^\circ - \angle C$ . Значит,  $\angle MKB = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \angle C) = \angle C$ ; следовательно,  $BO \perp KM$ . Но  $S_{BKM} = \frac{1}{2}|BD|^2 \sin A \sin B \sin C = R^2 \sin A \sin B \sin C = \frac{1}{2}S_{ABC}$ . (Мы воспользовались формулой  $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ .) С другой стороны, если  $h_1$  — высота  $\triangle BKM$ , проведенная из вершины  $B$ , то  $\frac{1}{2}S = \frac{1}{4}|AC| \cdot |BD| = S_{BKM} = \frac{1}{2}|KM| h_1 = \frac{1}{2}|BD| h_1 \sin B$ , значит,  $h_1 =$

$= \frac{|AC|}{2 \sin B} = R$ ; учитывая, что  $BO \perp KM$  получаем, что точка  $O$  лежит на  $KM$ .

**120.** Заметим, что  $\triangle ADK$  подобен  $\triangle ABK$ , поскольку  $|AK|^2 = |AC|^2 = |AD| \cdot |AB|$ . Если  $O$  — центр окружности, описанной около  $\triangle ABK$ , то  $\angle OAD + \angle ADK = 90^\circ - \angle AKB + \angle ADK = 90^\circ$  (предполагалось, что  $\angle AKB$  — острый; если  $\angle AKB$  — тупой, то рассуждения аналогичны).

**121.** Докажите, что прямая, параллельная  $BC$  и проходящая через  $E$ , делит биссектрису угла  $A$  в том же отношении, в каком ее делит биссектриса угла  $C$ .

**122.** Если  $O$  — вершина угла,  $A$  — точка на биссектрисе,  $B_1$  и  $B_2$  — точки пересечения со сторонами угла одной окружности,  $C_1$  и  $C_2$  ( $B_1$  и  $C_1$  — на одной стороне) — точки пересечения другой окружности, то  $\triangle AB_1C_1 = \triangle AB_2C_2$ .

**123.** Воспользуйтесь тем, что общая хорда двух окружностей, проходящих через  $A$ ,  $A_1$  и  $B$ ,  $B_1$ , проходит через  $D$  (задача П.18).

**125.** Если  $O$  — центр окружности, описанной около  $\triangle AMB$ , то  $\angle MAB = 90^\circ - \angle OMB = \angle BMC - 180^\circ$ . Таким же будет и  $\angle MAC$ .

**126.** Нетрудно доказать, что рассматриваемые окружности пересекаются в одной точке. Обозначим ее через  $P$ . В случае расположения точек, указанного на рис. 27,  $\angle PB_2M = 180^\circ - \angle BB_2P = \angle PC_1B = 180^\circ - \angle PC_1A = \angle PB_1A = \angle PA_2A = 180^\circ - \angle PA_2M$ , т. е. точки  $P$ ,

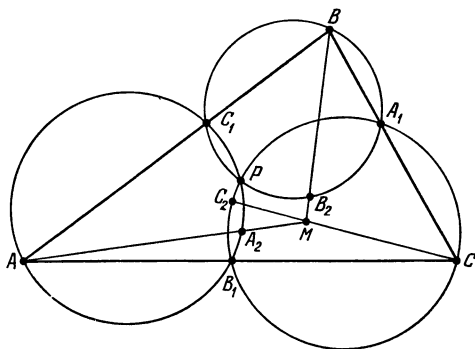


Рис. 27

$B_2$ ,  $M$  и  $A_2$  лежат на одной окружности. Точно так же докажем, что на одной окружности лежат точки  $P$ ,  $B_2$ ,  $M$ ,  $C_2$ , а следовательно, пять точек  $P$ ,  $M$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  лежат на одной окружности.

**127.** Докажите, что стороны треугольника  $A_1B_1C_1$  параллельны соответствующим сторонам треугольника  $ABC$ .

**128.** Докажите, что при перемещении прямой  $KL$  центр описанной около  $KLB_1$  окружности описывает прямую линию.

**129.** Докажите, что любые два отрезка делятся пополам своей точкой пересечения.

130. Если  $KN$  — перпендикуляр из  $K$  на  $AB$ ,  $\angle CAB = \alpha$ , то

$$\frac{|KN|}{|OM|} = \frac{|AK|}{|AO|} = \frac{|AO| - |KO|}{|AO|} = \frac{|AO| - 2|OM|\sin\frac{\alpha}{2}}{|AO|} =$$

$$= \frac{|AO| - 2|AO|\sin^2\frac{\alpha}{2}}{|AO|} = \cos\alpha = \frac{|CD|}{|CB|}. \text{ Поскольку } \triangle ACB \text{ и } \triangle ACD$$

подобны, то из предыдущего следует, что  $KN$  равен радиусу окружности, вписанной в  $\triangle ACD$ , а так как  $K$  лежит на биссектрисе угла  $A$ , то  $K$  — центр окружности, вписанной в  $\triangle ACD$ . Аналогично доказательство для  $L$ .

131. Обозначим через  $C_1$  и  $A_1$  середины  $AB$  и  $BC$ ,  $B'$  и  $A'$  — точки касания вписанной окружности с  $AC$  и  $BC$ . Пусть, для определенности,  $c \geq b$  ( $c$  и  $b$  — стороны  $\triangle ABC$ ), тогда биссектриса угла  $A$  пересекает продолжение  $C_1A_1$  в такой точке  $K$ , что  $|A_1K| = \frac{c-b}{2}$ , а прямая  $B'A'$

должна пройти через ту же точку  $K$ , поскольку треугольники  $KA_1A'$  и  $A'B'C$  равнобедренные,  $|A'C| = |B'C|$ ,  $|A_1K| = |A_1A'|$ ,  $\angle A'A_1K = \angle A'CB'$ .

132. Рассмотрим угол с вершиной  $A$ . На одной стороне угла взяты три точки —  $B_1, B_2, B_3$ , а на другой —  $C_1, C_2, C_3$ . Из теоремы Менелая (задача II.45, примечание) следует, что для того чтобы прямые  $B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3$  пересекались в одной точке, необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\frac{AB_2}{B_2B_1} \cdot \frac{C_1C_2}{C_2A} = \frac{AB_3}{B_3B_1} \cdot \frac{C_1C_3}{C_3A} \quad (1)$$

(отношения понимаются в смысле, указанном в примечании). В самом деле, если равенство (1) выполняется, то из теоремы Менелая будет следовать, что прямые  $B_2C_2$  и  $B_3C_3$  пересекают сторону  $B_1C_1$  треугольника  $AB_1C_1$  в одной точке.

133. Проведем через  $A$  прямую, параллельную  $BC$ , и обозначим через  $K$  и  $L$  точки ее пересечения с  $A_1C_1$  и  $A_1B_1$  соответственно.

Имеем:  $\frac{|KA|}{|BA_1|} = \frac{|AC_1|}{|C_1B|}$ ,  $\frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|A_1C|}{|AL|}$ . А по теореме Чевы (задача

II.44)  $\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1$ , значит,  $|KA| = |AL|$ . Но, если  $AA_1$  — биссектриса угла  $KA_1L$ , то, поскольку  $|KA| = |AL|$ ,  $AA_1$  перпендикулярна  $KL$ , т. е.  $AA_1$  — высота  $\triangle ABC$ .

134. Пусть  $K$  — точка пересечения  $AA_1$  и  $BB_1$ ,  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ . Точки  $A, K, H$  и  $B$  лежат на одной окружности (углы  $AKB$  и  $AHB$  либо равны, либо в сумме дают  $180^\circ$ , в зависимости от того, как расположены точки  $K$  и  $H$ , по одну сторону от прямой  $AB$  или по разные). Радиус этой окружности равен  $R$  — радиусу окружности, описанной около  $\triangle ABC$ . Если  $\varphi$  — угол между  $AA_1$  и  $AH$ , то  $|KH| = 2R \sin \varphi$ .

135. Пусть  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $A_1B_1C_1$ . Точки  $A_1, H, B_1$  и  $C$  лежат на одной окружности, точки  $B_1, H, C_1$  и

$A$  — также лежат на одной окружности, причем радиусы этих окружностей равны, углы  $\angle HB_1C$  и  $\angle HB_1A$  или равны или дополняют друг друга до  $180^\circ$ . Следовательно,  $|HA| = |HC|$ . Обратное утверждение неверно. Для каждой точки  $A_1$  на прямой  $BC$  существует, вообще говоря, два треугольника  $A_1B_1C_1$  и  $A_1B'_1C'_1$  ( $B_1$  и  $B'_1$  — на  $AC$ ,  $C_1$  и  $C'_1$  — на  $AB$ ), точки пересечения высот которых совпадают с центром описанной около  $\triangle ABC$  окружности, причем один из них подобен  $\triangle ABC$ , а другой — нет. Так, например, если  $ABC$  — правильный треугольник,  $A_1$  — середина  $BC$ , то в качестве  $B_1$  и  $C_1$  можно взять середины  $AC$  и  $AB$ , а в качестве  $B'_1$  и  $C'_1$  — точки на продолжении  $AC$  и  $AB$  за  $C$  и  $B$ ,  $|CB'_1| = |CB|$ ,  $|BC'_1| = |BC|$ . Обратное утверждение будет верным, если потребовать, чтобы точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  были расположены на сторонах  $\triangle ABC$ , а не на их продолжениях.

**136.** Докажем, что центр искомой окружности совпадает с ортоцентром (точкой пересечения высот). Пусть  $BD$  — высота,  $H$  — точка пересечения высот, а  $K$  и  $L$  — середины построенных отрезков, выходящих из вершины  $B$ ,  $|BK| = |BL| = l$ ,  $M$  — середина  $BD$ . Тогда  $|KH|^2 = |LH|^2 = |MH|^2 + |KM|^2 = l^2 - |BM|^2 + |MH|^2 = l^2 - \frac{|BD|^2}{4} + \left( |BH| - \frac{|BD|}{2} \right)^2 = l^2 + |BH|^2 - |BH| \cdot |BD| = l^2 - |BH| \cdot |HD|$ . Нам осталось доказать, что произведения отрезков высот, на которые каждая делится их точкой пересечения, равны. Проведем высоту  $AE$ . Ввиду подобия  $\triangle BHE$  и  $\triangle AHD$  имеем:  $|BH| \cdot |HD| = |AH| \cdot |HE|$ , что и требовалось.

**137.** Обозначим (рис. 28):  $|BC| = a$ ,  $|CA| = b$ ,  $|AB| = c$ . Проведем через центр вписанной окружности прямые, параллельные  $AB$  и  $BC$ , до пересечения с  $AK$  и  $KC$  в точках  $P$  и  $Q$ ; в треугольнике  $OPQ$  имеем:  $\angle POQ = \angle ABC$ ,  $|OQ| = p - c$ ,  $|OP| = p - a$ , где  $p$  — полупериметр  $\triangle ABC$ . Но по условию  $\angle NBM = \angle ABC$ ,  $|NB| = p - a$ ,  $|MB| = p - c$ . Следовательно,  $\triangle POQ = \triangle NBM$ . Если на прямой  $OP$  взять  $M_1$  так, что  $|OM_1| = |OQ|$ , а на  $OQ$  — точку  $N_1$  так, что  $|ON_1| = |OP|$ , то  $\triangle ON_1M_1 = \triangle NBM$  и соответствующие стороны  $BM$  и  $OM_1$ ,  $BN$  и  $ON_1$  окажутся соответственно параллельными. Значит,  $N_1M_1 \parallel NM$ . Докажем, что  $OK \perp N_1M_1$ , так как в четырехугольнике  $OPKQ$  два противоположных угла прямые, то он вписанный, следовательно,  $\angle OKP = \angle OQP$ . Далее,  $\angle KOP + \angle OM_1N_1 = \angle KOP + \angle OQP = \angle KOP + \angle OKP = 90^\circ$ , а это значит, что  $OK \perp M_1N_1$ .

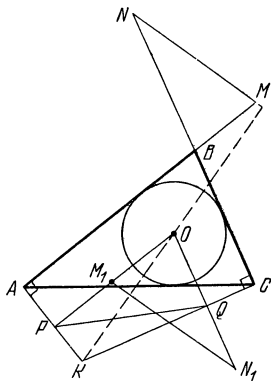


Рис. 28

**138.** Пусть для определенности  $P$  лежит на дуге  $AC$ . Точки  $A$ ,  $M$ ,  $P$ ,  $N$  лежат на одной окружности, значит,  $\angle NMP = \angle NAP$ . Аналогично,  $P$ ,  $M$ ,  $Q$ ,  $C$  — на одной окружности,  $\angle PMQ = 180^\circ - \angle PCQ = 180^\circ - \angle PAN = 180^\circ - \angle PMN$ .

139. Пусть  $ABC$  — данный треугольник (рис. 29),  $H$  — точка пересечения его высот. Заметим, что точки, симметричные  $H$  относительно его сторон, лежат на окружности, описанной около треугольника  $ABC$  (см. задачу II.107). Если  $H_1$  — точка, симметричная  $H$  относительно

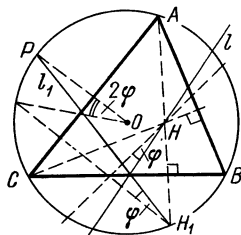


Рис. 29

стороны  $BC$ , то прямая  $l_1$ , симметричная  $l$  относительно той же стороны, проходит через  $H_1$ . При повороте  $l$  вокруг  $H$  на угол  $\varphi$  прямая  $l_1$  повернется вокруг  $H_1$  на тот же угол  $\varphi$  в противоположном направлении. Следовательно, если  $P$  — вторая точка пересечения прямой  $l_1$  с описанной окружностью, то радиус  $OP$  ( $O$  — центр описанной окружности) повернется на угол  $2\varphi$  вокруг  $O$  в соответствующем направлении. Те же рассуждения справедливы и для двух других прямых, симметричных  $l$ . Но если  $l$  совпадает с какой-либо высотой треугольника, то утверждение задачи очевидно (точка  $P$  совпадает с соответствующей вершиной треугольника). Следовательно, это утверждение справедливо всегда.

140. Пусть точки  $A, B, C$  и  $M$  в декартовой системе координат имеют координаты соответственно  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x, y)$ ,

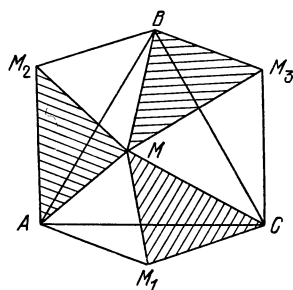


Рис. 30

координаты точки  $G - \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$ . Тогда справедливость доказываемого утверждения следует из тождества  $3 \left( x - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \right)^2 = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + (x - x_3)^2 - \frac{1}{3} ((x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2)$  и аналогичного соотношения для ординат.

141. Рассмотрим случай, когда точка  $M$  (рис. 30) лежит внутри треугольника  $ABC$ . Повернем треугольник  $ABM$  вокруг  $A$  на угол  $60^\circ$  так, чтобы  $B$  перешла в  $C$ . Получим треугольник  $AM_1C$ , равный  $\triangle ABM$ ,  $\triangle AMM_1$  — правильный, следовательно, стороны  $\triangle CMM_1$  равны отрезкам  $MA, MB, MC$ . Аналогично получим точки  $M_2$  и  $M_3$ . Площадь шестиугольника  $AM_1CM_3BM_2$  равна удвоенной площади  $\triangle ABC$ , т. е. равна  $a^2\sqrt{3}/2$ . С другой стороны, площадь этого шести-

угольника складывается из трех правильных треугольников:  $AMM_1$ ,  $CMM_3$ ,  $BMM_2$  и трех треугольников, равных искомому. Следовательно,  $3S + (|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2) \frac{\sqrt{3}}{4} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Воспользовавшись результатом задачи П.140, получим:  $3S + (3d^2 + a^2) \frac{\sqrt{3}}{4} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ , откуда  $S = \frac{\sqrt{3}}{12} (a^2 - 3d^2)$ . Аналогично рассматриваются другие случаи расположения точки  $M$ .

**142.** Воспользуйтесь результатами задач П.141 и П.6. Искомое геометрическое место вообще говоря, состоит из прямой и окружности.

**143.** Пусть (рис. 31, а)  $O$  — центр описанной, а  $I$  — центр вписанной окружности. Опустим из  $O$  и  $I$  перпендикуляры на  $AB$  и  $BC$ ;  $ON$ ,  $OP$ ,

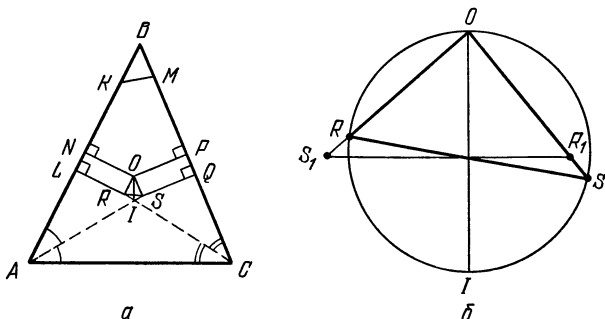


Рис. 31

$IL$ ,  $IQ$ . Если  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — соответственно длины сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ , а  $p$  — полупериметр  $\triangle ABC$ , то  $|BK| = |c - b|$ ,  $|BM| = |a - b|$ ,  $|BN| = c/2$ ,  $|BP| = a/2$ ,  $|BL| = |BQ| = p - b$ ,  $|NL| = \frac{1}{2}|a - b|$ ,  $|PQ| = \frac{1}{2}|c - b|$  (см.

задачу I.18). Следовательно, если провести через  $O$  прямые, параллельные сторонам  $AB$  и  $BC$  до пересечения с перпендикулярами, опущенными из  $I$ , то получится  $\triangle ORS$ , подобный  $\triangle BKM$ , с коэффициентом подобия  $1/2$ . Но окружность, построенная на  $OI$  как на диаметре, является описанной для  $\triangle ORS$ . Следовательно, радиус окружности, описанной около  $\triangle BKM$ , равен  $OI$ . Для доказательства второй части задачи заметим, что если на прямой  $OS$  отложить отрезок  $OR_1$ , равный  $OR$ , а на  $OR$  отложить отрезок  $OS_1$ , равный  $OS$ , то прямая  $S_1R_1$  будет параллельна  $KM$  (рис. 31, б); но  $\angle OR_1S_1 + \angle IOR_1 = \angle ORS + \angle IOS = 90^\circ$ , т. е.  $S_1R_1 \perp OI$ .

**144.** В обозначениях предыдущей задачи проведем через  $A$  прямую, перпендикулярную  $OI$ , обозначим через  $D$  ее точку пересечения с прямой  $BC$ . Докажите, что разность радиусов окружностей, описанных около треугольников  $ABD$  и  $ACD$ , равна радиусу окружности, описанной около треугольника  $BKM$ .

**145.** Пусть стороны треугольника равны  $a$ ,  $b$  и  $c$ , причем  $b = (a + c)/2$ .

а) Из равенства  $pr = \frac{1}{2}bh_b$  ( $p$  — полупериметр,  $r$  — радиус вписанного круга,  $h_b$  — высота, опущенная на сторону  $b$ ) получаем:  $\frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}bh_b$ ; но  $a+c=2b$ , так что  $h_b=3r$ .

б) Это утверждение следует из того, что  $r = \frac{1}{3}h_b$ , а точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении 2:1.

в) Продолжим биссектрису  $BD$  до пересечения с описанной окружностью в точке  $M$ . Если доказать, что  $O$  — центр вписанной окружности — делит  $BM$  пополам, то тем самым будет доказано и наше утверждение. (Проведем диаметр  $BN$ , тогда прямая, соединяющая центры вписанной и описанной окружностей, будет параллельна  $NM$ , а  $\angle BMN = 90^\circ$ .) Но  $\triangle COM$  — равнобедренный, так как  $\angle COM = \angle OCM = \frac{1}{2}(\angle C + \angle B)$ . Значит,  $|CM| = |OM|$ . Из условия  $b = (a+c)/2$  по свойству биссектрисы получаем, что  $|CD| = a/2$ . Пусть  $K$  — середина  $CB$ ;  $\triangle CKO = \triangle CDO$  ( $|CK| = |CD|$ ,  $\angle KCO = \angle OCD$ ); отсюда следует:  $\angle BKO = \angle CDM$ , кроме того,  $\angle DCM = \angle ODK = \angle B/2$ ,  $|CD| = |BK|$ , т. е.  $\triangle BKO = \triangle CDM$ ,  $|CM| = |BO|$ , значит,  $|BO| = |OM|$ , что и требовалось.

г) Возьмем любую точку на биссектрисе. Пусть расстояния до сторон  $BC$  и  $BA$  равны  $x$ , а до стороны  $AC$  —  $y$ . Имеем:  $\frac{1}{2}(ax + cx + by) = S_{\triangle} \Rightarrow b(2x + y) = 2S_{\triangle} \Rightarrow 2x + y = h_b$ .

д) Если  $L$  — середина  $BA$ , то нужный нам четырехугольник гомотетичен четырехугольнику  $BCMA$  с коэффициентом  $1/2$  (см. пункт в)).

**146.** Пусть  $N$  — точка пересечения общей касательной с  $BC$ . Нам достаточно проверить, что  $|FN| \cdot |NG| = |KN| \cdot |NM| = |DN| \cdot |NE|$ . Все отрезки легко вычисляются, поскольку  $|BD| = |CE| = p - b$ ,  $|DE| = |b - c|$ ,  $\frac{|DN|}{|NE|} = \frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p}$  ( $r_a$  — радиус окружности, касающейся стороны  $BC$  и продолжений сторон  $AB$  и  $AC$ ), и т. д.

**147.** Проведем через вершины треугольника  $ABC$  прямые, параллельные противоположным сторонам. Они образуют  $\triangle A_1B_1C_1$ , подобный  $\triangle ABC$ ; он получается из  $\triangle ABC$  с помощью гомотетии, центр которой — в общем для  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_1B_1C_1$  центре тяжести, а коэффициент равен  $-2$ . Точка пересечения высот для  $\triangle ABC$  является центром описанной около  $\triangle A_1B_1C_1$  окружности. Следовательно, точки  $O$  (центр описанной окружности),  $G$  (центр тяжести) и  $H$  (точка пересечения высот  $\triangle ABC$ ) лежат на одной прямой, причем  $|OG| = \frac{1}{2}|GH|$ ,  $G$  — на отрезке  $OH$ .

**148.** В остроугольном треугольнике прямая Эйлера пересекает наибольшую и наименьшую стороны. В тупоугольном — наибольшую и среднюю.

**150.** Покажите, что требуемым свойством обладает такая точка  $P$  на прямой Эйлера, для которой  $|PO| = |OH|$  ( $O$  — центр описанного круга,  $H$  — точка пересечения высот); при этом для каждого треугольника расстояние от центра тяжести до противоположной вершины исходного треугольника равно  $\frac{4}{3}R$ , где  $R$  — радиус окружности, описанной около  $\triangle ABC$ , а прямая, проходящая через центр тяжести этого треугольника и противоположную вершину исходного, проходит через  $O$ .

**151.** Пусть  $C_1$  — центр описанной около  $\triangle APB$  окружности, а  $C_2$  — точка, симметричная  $C_1$  относительно  $AB$ . Аналогично для треугольников  $BPC$  и  $CPA$  определим точки  $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$ . Поскольку треугольники  $AC_1B$ ,  $AC_2B$ ,  $BA_1C$ ,  $BA_2C$ ,  $CB_1A$ ,  $CB_2A$  равнобедренные, с углами при вершинах по  $120^\circ$ , то треугольники  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  — правильные (см. задачу II.296). Подсчитав углы четырехугольников с вершинами  $P$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ , можно доказать, что эти точки ( $P$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ ) лежат на одной окружности. Далее, если  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $APB$ , то, поскольку  $|PH| = |C_1C_2|$  и, значит,  $PHC_2C_1$  — параллелограмм, прямая  $C_1H$  (прямая Эйлера треугольника  $APB$ ) проходит через середину  $PC_2$ . Но  $PC_2$  — хорда окружности с центром  $C_1$ , следовательно,  $C_1H$  перпендикулярна  $PC_2$ . Таким образом, три наших прямых Эйлера совпадают с серединными перпендикулярами отрезков  $PC_2$ ,  $PB_2$  и  $PA_2$ , а поскольку точки  $P$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  лежат на одной окружности, то эти прямые пересекаются в ее центре — центре правильного треугольника  $A_2B_2C_2$ . Из результата задачи II.296 следует, что эти три прямые Эйлера пересекаются в точке пересечения медиан треугольника  $ABC$ .

**152.** Пусть  $ABC$  — данный треугольник, стороны которого  $a$ ,  $b$  и  $c$ , причем  $a \geq b \geq c$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  — точки касания вписанной окружности,  $I$  — центр вписанной,  $O$  — центр описанной окружности. Поскольку  $I$  по отношению к  $\triangle A_1B_1C_1$  является центром описанной окружности, то достаточно доказать, что прямая  $IO$  проходит через точку пересечения высот  $\triangle A_1B_1C_1$ . Отложим на лучах  $AC$  и  $BC$  — отрезки  $AK$  и  $BL$ ,  $|AK| = |BL| = c$ , а на лучах  $AB$  и  $CB$  — отрезки  $AM$  и  $CN$ ,  $|AM| = |CN| = b$ . Как известно (см. задачу II.143), прямая  $IO$  перпендикулярна  $LK$  и  $MN$ , значит,  $LK \parallel MN$ . Обозначим:  $\angle KLC = \angle BNM = \varphi$ . По теореме синусов для треугольников  $KLC$  и  $BNM$

$$\frac{|LC|}{|KC|} = \frac{a-c}{b-c} = \frac{\sin(\varphi + C)}{\sin \varphi}, \quad (1)$$

$$\frac{|BN|}{|MB|} = \frac{a-b}{b-c} = \frac{\sin(B-\varphi)}{\sin \varphi}. \quad (2)$$

Проведем теперь в треугольнике  $A_1B_1C_1$  высоту на сторону  $B_1C_1$ . Пусть  $Q$  — точка ее пересечения с прямой  $IO$ . Нужно доказать, что  $Q$  — точка пересечения высот  $\triangle A_1B_1C_1$ . Но расстояние от  $I$  до  $B_1C_1$  есть

$$|IA_1| \cos A_1 = r \sin \frac{A}{2}. \text{ Значит, должно выполняться равенство } |A_1Q| = 2r \sin \frac{A}{2}. \text{ Углы } \triangle QIA_1 \text{ можно выразить через углы } \triangle ABC \text{ и } \varphi,$$



а именно:  $\angle QIA_1 = 180^\circ - \varphi$ ,  $\angle QA_1I = \frac{\angle B - \angle C}{2}$ . Нужно доказать,

$$\text{что } 2 \sin \frac{A}{2} = \frac{\sin \varphi}{\sin \left( \varphi - \frac{B - C}{2} \right)} \Leftrightarrow \sin(\varphi + C) - \sin(B - \varphi) = \sin \varphi. \quad \text{По-}$$

следнее равенство следует из (1) и (2).

**153.** При доказательстве используется тот факт, что если из какой-либо точки  $P$  опустить перпендикуляры  $PK$  и  $PL$  на прямые, пересекающиеся в точке  $M$ , то  $P$ ,  $K$ ,  $L$  и  $M$  будут лежать на одной окружности \*).

**154.** Воспользуйтесь результатом задачи I.246.

**156.** Расстояние между проекциями  $M$  на  $AC$  и  $BC$  равно  $|CM| \sin C$ . Если  $K$  и  $L$  — проекции  $M$  на  $AB$  и  $BC$ , то проекция  $AB$  на прямую  $KL$  (это и есть прямая Симсона) равна  $|AB| |\cos \angle BKL| = |AB| |\cos \angle BML| = |AB| \sin \angle CBM = |CM| \sin C$ .

**157.** Докажите, что стороны треугольников  $A_1B_1C_1$ ,  $A_2B_2C_2$  и  $A_3B_3C_3$  соответственно параллельны.

**158.** Докажите, что прямая Симсона, соответствующая  $A_1$ , перпендикулярна  $B_1C_1$  (то же и для других точек). Далее, можно доказать, что прямая Симсона, соответствующая точке  $A_1$  проходит через середину  $A_1H$ , где  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$  (см. также решение задачи II.166). Следовательно, прямые Симсона являются высотами треугольника, вершины которого — середины отрезков  $A_1H$ ,  $B_1H$ ,  $C_1H$ . **З а м е ч а н и е.** Можно доказать, что для произвольных точек  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  прямые Симсона этих точек относительно треугольника  $ABC$  образуют треугольник, подобный треугольнику  $A_1B_1C_1$ , при этом центр описанной около него окружности совпадает с серединой отрезка, соединяющего точки пересечения высот треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ .

**159.** Прежде всего нужно проверить справедливость следующего утверждения: если перпендикуляры, восстановленные к сторонам (или продолжениям сторон) треугольника в точках пересечения с некоторой прямой пересекаются в одной точке  $M$ , то  $M$  лежит на окружности, описанной около треугольника. (Это утверждение является обратным по отношению к утверждению задачи 153). Рассмотрим параболу  $y =$

$$= ax^2. \text{ Произвольная касательная к ней имеет вид: } y = kx - \frac{k^2}{4a} \text{ (каса-}$$

тельная имеет единственную общую точку с параболой, значит, дискриминант уравнения  $ax^2 = kx + b$  равен нулю). Эта касательная пере-

секает ось  $x$  в точке  $x = \frac{k}{4a}$ . Перпендикуляром к касательной в этой

точке будет прямая  $y = -\frac{1}{k} \left( x - \frac{k}{4a} \right) = -\frac{x}{k} + \frac{1}{4a}$ . Следовательно,

---

\*) Более подробно о семействе прямых Симсона можно прочесть в книге: Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л. Прямые и кривые. — М.: Наука, 1978.

все такие перпендикуляры проходят через точку  $\left(0; \frac{1}{4a}\right)$  (фокус параболы). Теперь воспользуемся замечанием, сделанным в начале решения.

**160.** Пусть  $ABC$  — данный треугольник,  $H$  — точка пересечения его высот,  $A_1, B_1, C_1$  — середины отрезков  $AH, BH, CH$ ;  $AA_2$  — высота,  $A_3$  — середина  $BC$ . Будем считать для удобства, что  $ABC$  — остроугольный треугольник. Поскольку  $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$  и  $\triangle B_1A_2C_1 = \triangle B_1HC_1$ , то  $\angle B_1A_2C_1 = \angle B_1HC_1 = 180^\circ - \angle B_1A_1C_1$ , т. е. точки  $A_1, B_1, A_2, C_1$  лежат на одной окружности. Также легко видеть, что  $\angle B_1A_3C_1 = \angle B_1HC_1 = 180^\circ - \angle B_1A_1C_1$ , т. е. точки  $A_1, B_1, A_3, C_1$  тоже лежат на одной (а значит, на той же) окружности. Отсюда следует, что все 9 точек, о которых говорится в условии, лежат на одной окружности. Случай тупоугольного треугольника  $ABC$  рассматривается аналогично. Заметим, что окружность девяти точек гомотетична описанной окружности с центром в  $H$  и коэффициентом  $1/2$ . (Именно так расположены треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ ). С другой стороны, окружность девяти точек гомотетична описанной окружности с центром в точке пересечения медиан треугольника  $ABC$  и коэффициентом  $-1/2$ . (Именно так расположены треугольники  $ABC$  и треугольник с вершинами в серединах его сторон.)

**161.** Наше утверждение следует из того, что  $D$  лежит на окружности девяти точек, а эта окружность гомотетична описанной окружности с центром в  $H$  и коэффициентом  $1/2$ . (см. задачу П.160).

**162.** Наше утверждение следует из того, что  $E$  лежит на окружности девяти точек, а эта окружность гомотетична описанной окружности с центром в  $M$  и коэффициентом  $-1/2$  (см. задачу П.160).

**163.** Это расстояние — полусумма расстояний до  $BC$  точки пересечения высот  $H$  и центра описанного круга, а последнее равно половине  $|HA|$ .

**164.** Пусть  $M_0$  — середина  $HP$ ,  $A_0$  — середина  $HA$ ,  $A_0, A_1$  и  $M_0$  лежат на окружности девяти точек. Следовательно,  $M$  также лежит на этой окружности, поскольку из условия задачи следует равенство  $|M_0H| \cdot |HM| = |A_0H| \cdot |HA_1|$  и  $H$  одновременно или внутри или вне каждого из отрезков  $M_0M$  и  $A_0A_1$ .

**165.** Докажем, что  $M$  и  $N$  находятся на соответствующих средних линиях треугольника  $ABC$ . Если  $P$  — середина  $AB$ , то  $\angle MPA = 2\angle ABM = \angle ABC = \angle APL$ . Пусть, для определенности,  $ABC$  — остроугольный треугольник,  $\angle C \geq \angle A$ , тогда  $\angle MNK = 180^\circ - \angle KNB = \angle KCB = \angle MLK$  (воспользовались тем, что точки  $K, N, B$  и  $C$  на одной окружности, а также тем, что  $ML$  параллельна  $BC$ ). Значит,  $M, L, N$  и  $K$  на одной окружности. Далее,  $\angle LMK = \angle PMB + \angle NMK = \frac{1}{2}\angle B + \angle BMK = \frac{1}{2}\angle B + \angle A$ . Если  $O$  — центр окружности, описанной около  $\triangle LMK$ , то

$\angle LOK = 2\angle LMK = \angle B + 2\angle A = 180^\circ - \angle C + \angle A = 180^\circ - \angle LPK$  ( $\angle LPK = \angle APK - \angle APL = 180^\circ - 2\angle A - \angle B = \angle C - \angle A$ ), т. е.  $O$  лежит на окружности, проходящей через  $L, P$  и  $K$ , а это и есть окружность девяти точек.

**166.** Поскольку середина  $FH$  лежит на окружности девяти точек (см. задачу П.160), то достаточно показать, что и прямая Симсона, соответствующая точке  $F$ , делит  $FH$  пополам. Пусть  $K$  — проекция  $F$  на какую-либо сторону треугольника,  $D$  — основание высоты, проведенной к той же стороне,  $H_1$  — точка пересечения этой высоты с описанной окружностью,  $|H_1D| = |HD|$  (см. задачу, П.107, решение),  $L$  — точка пересечения прямой Симсона с той же высотой и, наконец,  $M$  — точка на прямой  $HH_1$ , для которой  $FM \parallel KD$ ; тогда  $\triangle FMH_1 = \triangle KDL$  ( $|FM| = |KD|$ ), оба прямоугольные и  $\angle DLK = \angle MH_1F$ , поскольку высота треугольника является прямой Симсона, соответствующей вершине, из которой она выходит, и можно воспользоваться утверждением задачи П.154. Нетрудно также

показать, что направления  $H_1M$  и  $DL$  совпадают, т. е.  $FKHL$  — параллелограмм, откуда и следует наше утверждение.

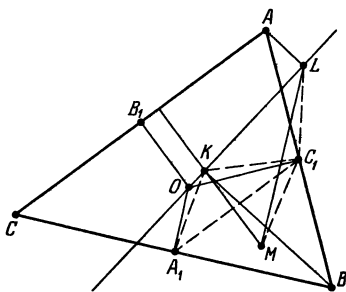


Рис. 32

**167.** На рис. 32  $O$  — центр описанной окружности,  $A_1, B_1, C_1$  — середины сторон,  $L$  и  $K$  — проекции  $A$  и  $B$  на  $l$ ,  $M$  — точка пересечения прямых, проходящих через  $L$  и  $K$  перпендикулярно  $BC$  и  $CA$ . Треугольник  $ABC$ , для определенности, — остроугольный треугольник. Докажем сначала, что  $C_1$  является центром окружности, описанной около  $\triangle KLM$ . Точки  $A_1, O, K, C_1, B$  — на одной окружности. Следова-

тельно,  $\angle C_1KL = \angle OA_1C_1 = 90^\circ - \angle C$ , точно также  $\angle C_1LK = 90^\circ - \angle C$ . Значит,  $|KC_1| = |C_1L|$ ,  $\angle LC_1K = 2\angle C$ , а поскольку  $\angle KML = \angle C$ , наше утверждение доказано. Далее,  $KM$  перпендикулярна  $A_1C_1$ ,  $|KC_1| = |C_1M|$ , значит,  $\angle C_1MA_1 = \angle C_1KA_1 = 180^\circ - \angle B$ , то есть  $M$  лежит на окружности, описанной около  $A_1B_1C_1$ .

**168.** Обозначим через  $H$  точку пересечения высот треугольника  $ABC$ , а через  $A_2, B_2, C_2$  — середины отрезков  $AH, BH, CH$ . Заметим, что треугольники  $AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C$  подобны между собой (соответственные вершины обозначены одинаковыми буквами), причем  $A_2, B_2$  и  $C_2$  — соответственно центры описанных около них окружностей. Докажем сначала следующее утверждение: три прямые, проходящие через точки  $A_2, B_2$  и  $C_2$  и одинаково расположенные относительно треугольников  $AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C$ , пересекаются в одной точке на окружности девяти точек. Заметим, что прямые  $A_2B_1, B_2B$  и  $C_2B_1$  одинаково расположены относительно треугольников  $AB_1C_1, A_1BC_1$  и  $A_1B_1C$  и пересекаются в точке  $B_1$ , лежащей на окружности девяти точек. Поскольку точки  $A_2, B_2, C_2$  лежат на окружности девяти точек, то очевидно, что и три прямые, получающиеся из прямых  $A_2B_1, B_2B$  и  $C_2B_1$  поворотом на один и тот же угол вокруг точек  $A_2, B_2$  и  $C_2$  соответственно, также будут пересекаться в одной точке, расположенной на окружности девяти точек. Пусть теперь  $P$  — точка пересечения прямых Эйлера треугольников  $AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C$ . Обозначим:  $\angle PA_2A = \varphi$ . Для удобства будем считать, что треугольник  $ABC$

остроугольный, а точка  $P$  лежит на дуге  $B_1A_2$  окружности девяти точек (рис. 33). Тогда  $\angle PA_2A_1 = 180^\circ - \varphi$ ,  $\angle PA_2B_1 = 180^\circ - \varphi - \angle B_1A_2A_1 = 180^\circ - \varphi - \angle B_1C_1A_1 = 2\angle C - \varphi$ ,  $\angle PA_2C_1 = 180^\circ - \varphi + 180^\circ - 2\angle B = 360^\circ - \varphi - 2\angle B$ . Поскольку хорды  $PA_1$ ,  $PB_1$  и  $PC_1$  пропорциональны синусам углов, на них опирающихся, то осталось доказать, что из трех величин  $\sin \varphi$ ,  $\sin(2C - \varphi)$ ,  $-\sin(2B + \varphi)$  одна (в нашем случае первая) равна сумме двух других, т. е.  $\sin \varphi = \sin(2C - \varphi) - \sin(2B + \varphi)$ . Но в треугольнике  $AA_2H_1$ :  $|AA_2| = R$ ,  $|AH_1| = 2R \cos A$  ( $R$  — радиус описанной окружности,  $R \cos A$  — расстояние от центра описанного круга  $A_2$  до  $B_1C_1$ ),  $\angle H_1AA_2 = \angle A + 2\angle B - 180^\circ$ . По теореме синусов для  $\triangle AA_2H_1$ :

$$\frac{2 \cos A}{\sin \varphi} = \frac{1}{\sin(2B + A + \varphi)} \Rightarrow -\sin(2B + 2A + \varphi) - \sin(2B + \varphi) = \sin \varphi \Rightarrow \sin(2C - \varphi) - \sin(2B + \varphi) = \sin \varphi,$$

что и требовалось. Таким образом, доказано утверждение в случае остроугольного треугольника.

Случай тупоугольного  $\triangle ABC$  рассматривается точно так же.

**169.** Пусть  $ABC$  — данный треугольник,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  — середины соответствующих сторон. Докажите, что окружность, проходящая, например, через вершину  $A$  и удовлетворяющая условию задачи, проходит через точки пересечения внутренней и внешней биссектрисы угла  $A$  со средней линией  $B_1C_1$ . Значит, для всех точек  $M$  этой окружности будет выполняться равенство  $|B_1M| : |C_1M| = |B_1A| : |C_1A| = b : a$  (см. задачу П.9). Таким образом, если  $M_1$  и  $M_2$  — точки пересечения двух таких окружностей, то  $|A_1M_1| : |B_1M_1| : |C_1M_1| = a : b : c$  (то же для точки  $M_2$ ), поэтому  $M_1$  и  $M_2$  будут принадлежать третьей окружности. Кроме того,  $M_1$  и  $M_2$  принадлежат прямой, для всех точек  $M$  которой выполняется равенство  $(c^2 - b^2)|A_1M|^2 + (a^2 - c^2)|B_1M|^2 + (b^2 - a^2)|C_1M|^2 = 0$  (см. задачу П.14 и ее решение). Эта прямая проходит через центр описанного около  $\triangle A_1B_1C_1$  круга и через точку пересечения его медиан (проверьте это, выразив длины медиан через стороны), т. е. она совпадает с прямой Эйлера  $\triangle A_1B_1C_1$ , а значит, и  $\triangle ABC$ .

**170.** а) Аналогично тому, как это было сделано в предыдущей задаче, можно доказать, что эти три окружности пересекаются в двух точках  $M_1$  и  $M_2$ , причем  $|AM_1| : |BM_1| : |CM_1| = bc : ac : ab$  (также для  $M_2$ ).

б) Следует из а) и задачи П.14.

в) Докажите, что если  $M$  внутри  $\triangle ABC$ , то  $\angle AM_1C = 60^\circ + \angle B$ ,  $\angle BM_1A = 60^\circ + \angle C$ ,  $\angle CM_1B = 60^\circ + \angle A$  (можно воспользоваться для этого теоремой Бретшнейдера — задача П.236).

**171.** Возьмем на  $BC$  точку  $A_1$ , а на  $BA$  точку  $C_1$  так, что  $|BA_1| = |BC|$ ,  $|BC_1| = |BA|$  ( $\triangle A_1BC_1$  симметричен  $\triangle ABC$  относительно биссектрисы угла  $B$ ). Очевидно,  $BK$  делит пополам  $A_1C_1$ . Построим

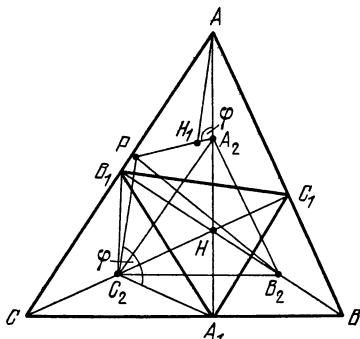


Рис. 33

два параллелограмма  $BA_1MC_1$  и  $BCND$  (соответствующие стороны параллелограммов параллельны, точки  $B, K, M$  и  $N$  — на одной прямой);  $|CN| = |AA_1| \frac{|BC|}{|BA_1|} = \frac{|BC|^2}{|BA|}$ , следовательно,  $\frac{|AK|}{|KC|} = \frac{|AB|}{|CN|} = \frac{|AB|^2}{|BC|^2}$ .

172. Имеем (рис. 34)  $\angle FE_1A = \angle EDF = \angle A$ ; значит,  $|AF| = |E_1F|$ ,  $\angle FE_1N = \angle FDB = \angle C$ ,  $\angle E_1FN = \angle A$ . Следовательно,  $\triangle E_1FN$  подобен  $\triangle ABC$ ,  $\frac{|AF|}{|FN|} = \frac{|E_1F|}{|FN|} = \frac{|AC|}{|AB|}$ ,  $\angle AFN = 180^\circ - \angle A$ . Теперь можно показать, что  $AN$  — симедиана. Для этого рас-

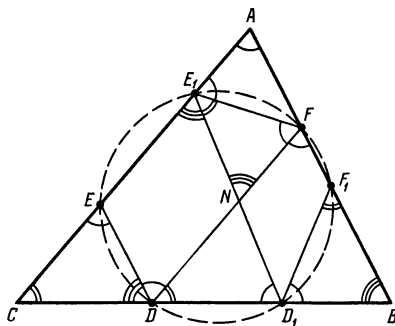


Рис. 34

смотрим параллелограмм  $ACA_1B$ ;  $AA_1$  делит пополам  $BC$ ,  $\triangle ACA_1$  подобен  $\triangle AFN$ , значит  $\angle NAF = \angle A_1AC$ .

173. Окружность Аполлония, проходящая через вершину  $B$  треугольника  $ABC$ , есть геометрическое место точек  $M$ , для которых  $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|AB|}{|BC|}$  (задача II.170, решение). Следовательно, если  $D$  — точка пересечения этой окружности Аполлония и описанной около  $ABC$  окружности, то прямая  $BD$  делит  $AC$  в отношении  $\frac{S_{BAD}}{S_{BCD}} =$

$$= \frac{|AB| \cdot |AD|}{|CB| \cdot |CD|} = \frac{|AB|^2}{|CB|^2}.$$

174. Пусть  $N$  — точка пересечения  $BQ$  и  $CD$ ,  $O$  — центр окружности,  $R$  — ее радиус. Заметим, что  $\angle NBC = \frac{1}{2} \angle PMQ$ . (Если  $Q$  на отрезке  $NB$ , то  $\angle NBC = 90^\circ - \angle QBP = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle QOP = \frac{1}{2} \angle PMQ$ .)

Значит, треугольники  $NBC$  и  $POM$  подобны,  $|CN| = |BC| \frac{R}{|PM|} = R \frac{|PD|}{|PM|} = R \frac{|BP|}{|AB|} = \frac{1}{2} |BP| = \frac{1}{2} |CD|$ .

175. Пусть  $H$  — точка пересечения высот,  $O$  — центр описанного круга,  $B_1$  — середина  $CA$ . Прямая  $MN$  проходит через середину  $BH$  — точку  $K$ ,  $|BK| = |B_1O|$ . Докажите, что прямая  $MN$  параллельна  $OB$  (если  $\angle C > \angle A$ , то  $\angle MKN = 2\angle MBN = \angle C - \angle A = \angle OBH$ ).

176. Пусть прямая  $AM$  вторично пересекает окружность, проходящую через  $B$ ,  $C$  и  $M$  в точке  $D$ . Тогда  $\angle MDB = \angle MBA = \angle MAC$ ,  $\angle MDC = \angle MBC = \angle MAB$ . Следовательно,  $ABDC$  — параллелограмм.

177. Из решения задачи I.234 следует, что  $\frac{|LM|}{|MK|} = \frac{|LN|}{|NK|}$ . Можно считать, что  $l$  проходит через  $N$ . Применим к  $\triangle NKP$  теорему синусов. Заменим отношение синусов отношением соответствующих хорд. Будем иметь:  $|NP| = \frac{|NK| \sin \angle NKP}{\sin \angle KPN} = \frac{|NK| \sin \angle NKM}{\sin \angle KMA} = \frac{|NK|}{|KM|} |NM|$  и т. д.

178. Пусть  $O$  — центр вписанной окружности,  $K$  и  $L$  — точки касания со сторонами  $AC$  и  $AB$ , прямая, проходящая через  $N$  параллельно  $BC$ , пересекает стороны  $AB$  и  $AC$  в точках  $R$  и  $M$ . Четырехугольник  $OKMN$  — вписанный ( $\angle ONM = \angle OKM = 90^\circ$ ); следовательно,  $\angle OMN = \angle OKN$ , аналогично  $\angle ORN = \angle OLN$ , но  $\angle OLN = \angle OKN$ , значит,  $\angle ORN = \angle OMN$  и  $\triangle ORM$  — равнобедренный,  $ON$  — высота; таким образом,  $|RN| = |NM|$ .

179. Если  $|BC| = a$ ,  $|CA| = b$ ,  $|AB| = c$ , то, как известно (см. задачу I.18),  $|MC| = \frac{a+b-c}{2}$ . Проведем через  $K$  прямую, параллельную  $AC$ ; обозначим ее точки пересечения с  $AB$  и  $BC$  соответственно через  $A_1$  и  $C_1$ . Окружность, вписанная в  $\triangle ABC$ , является вневписанной (касается  $A_1C_1$  и продолжений  $BA_1$  и  $BC_1$ ) для  $\triangle A_1BC_1$ . Но  $\triangle A_1BC_1$  подобен  $\triangle ABC$ . Следовательно, окружность, вневписанная в  $ABC$ , будет касаться  $AC$  в точке  $N$ ; обозначим точки касания ее с продолжениями  $BA$  и  $BC$  соответственно через  $R$  и  $L$ . Имеем:  $|BR| = |BL| = \frac{1}{2}(a+b+c)$ , значит,  $|AN| = |AR| = |RB| - |BA| = \frac{a+b-c}{2} = |MC|$ .

180. Проведем через  $K$  прямую, параллельную  $BC$ . Обозначим через  $L$  и  $Q$  точки пересечения касательной в точке  $P$  с прямой  $BC$  и построенной прямой, ей параллельной, а через  $N$  — точку пересечения  $AK$  с  $BC$ . Так как  $|CN| = |BM|$  (см. задачу II.179), то достаточно доказать, что  $|NL| = |LM|$ ; но  $|PL| = |LM|$ , значит, нужно доказать, что  $|PL| = |NL|$ . Поскольку  $\triangle PLN$  подобен  $\triangle PQK$ , в котором  $|PQ| = |QK|$ , то  $|PL| = |NL|$  и  $|CL| = |LB|$ .

181. Пусть  $M$  и  $N$  — точки пересечения прямой  $LK$  с прямыми  $l$  и  $CD$ . Тогда  $|AM|^2 = |ML| \cdot |MK|$ . Из подобия треугольников  $KMB$  и  $DKN$  следует, что  $|MK| = \frac{|KN| \cdot |MB|}{|DN|}$ . Из подобия треугольников  $CNL$  и  $MLB$  следует:  $|ML| = \frac{|LN| \cdot |MB|}{|CN|}$ .

Таким образом,  $|MK| \cdot |ML| = \frac{|KN| \cdot |LN|}{|CN| \cdot |DN|} |MB|^2 = |MB|^2$ , т. е.  $|MA|^2 = |MB|^2$ ,  $|MA| = |MB|$ .

**182.** Пусть (рис. 35)  $B$  — вторая общая точка окружностей,  $C$  — точка на прямой  $AB$ , из которой проведены касательные, и, наконец,  $K$  — точка пересечения прямых  $MN$  и  $PQ$ . Воспользовавшись теоремой синусов и результатом задачи 1.234, получим:

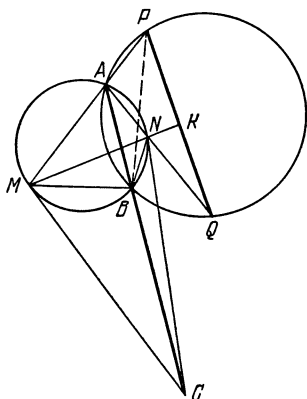


Рис. 35

$$\begin{aligned} \frac{|PM|}{|MA|} &= \frac{|PM|}{\sin \angle PBM} \cdot \frac{\sin \angle PBM}{|MA|} = \\ &= \frac{|BM|}{\sin \angle BPM} \cdot \frac{\sin \angle PBM}{|MA|} = \sqrt{\frac{|CB|}{|CA|}} \times \\ &\times \frac{\sin \angle PBM}{\sin \angle BPM}. \text{ Таким образом, обозначив через } \alpha \text{ угол } \angle AMB, \text{ а через } \beta - \\ &\text{ угол } \angle APB \text{ (} \alpha \text{ и } \beta \text{ постоянны), получим:} \\ \frac{|PM|}{|MA|} &= \sqrt{\frac{|CB|}{|CA|}} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta}. \text{ Аналогично найдем: } \frac{|AN|}{|NQ|} = \sqrt{\frac{|CA|}{|CB|}} \times \\ &\times \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}. \text{ Но по теореме Менелая} \\ &\text{(см. задачу II.45)} \frac{|PM|}{|MA|} \cdot \frac{|AN|}{|NQ|} \cdot \frac{|QK|}{|KP|} = \end{aligned}$$

$$= 1. \text{ Значит, } |QK|/|KP| = 1.$$

**183.** Проведем через  $M$  прямую, параллельную  $AC$ , до пересечения в точках  $A_1$  и  $C_1$  с прямыми  $BA$  и  $BC$ . Имеем:  $\angle A_1KM = 90^\circ - \angle DKM = 90^\circ - \angle KBD = \angle BAD = \angle KA_1M$ ; следовательно,  $\triangle KMA_1$  — равнобедренный и  $|A_1M| = |MK|$ . Аналогично  $|MC_1| = |ML|$ ; но  $|KM| = |ML|$ , значит,  $|A_1M| = |MC_1|$ , т. е. прямая  $BM$  делит  $AC$  пополам.

**184.** Пусть  $M$  — точка пересечения  $ND$  и  $AB$ , а  $P$  — точка пересечения касательных к окружности в точках  $A$  и  $D$ .

Поскольку прямые  $NC$ ,  $AB$  и  $PD$  параллельны, то из подобия соответствующих треугольников получим:

$$|AM| = |DP| \cdot \frac{|AN|}{|NP|}, \quad (1)$$

$$\frac{|MB|}{|NC|} = \frac{|MD|}{|ND|} = \frac{|AP|}{|NP|}, \quad |MB| = |NC| \cdot \frac{|AP|}{|NP|}; \quad (2)$$

но  $|DP| = |AP|$ ,  $|NC| = |AN|$ . Следовательно, правые части выражений (1) и (2) равны, т. е.  $|AM| = |MB|$ .

**185.** Будем считать, что  $D$  — середина  $CB$  и  $AD$  пересекает вторично окружность в точке  $K$ . Докажем, что касательные к окружности в точках  $B$  и  $C$  пересекаются на прямой  $MK$ .

Рассмотрим четырехугольник  $CMBK$ . Для того чтобы касательные к окружности в точках  $C$  и  $B$  пересекались на диагонали  $MK$ , необходимо и достаточно (см. задачу I.234), чтобы  $\frac{|CM|}{|CK|} = \frac{|MB|}{|BK|}$ ; но

$\frac{|CM|}{|CK|} = \frac{|AB|}{|CK|} = \frac{|BD|}{|DK|} = \frac{|CD|}{|DK|} = \frac{|AC|}{|BK|} = \frac{|MB|}{|BK|}$ . (В первом и последнем равенстве использовалось то, что  $|CM| = |AB|$ ,  $|AC| = |MB|$  ввиду параллельности  $AM$  и  $CB$ , во втором и четвертом — подобия  $\triangle ABD$  и  $\triangle CDK$ ,  $\triangle ADC$  и  $\triangle KDB$ , в третьем — то, что  $AD$  — медиана.)

**186.** Пусть  $O$  — центр окружности,  $N_1, M_1, P_1, R_1$  — точки, симметричные точкам  $N, M, P, R$  соответственно относительно прямой  $OA$ ,  $K$  — точка пересечения прямых  $N_1R_1$  и  $QS$ . Нужно доказать, что точки  $R_1, S$  и  $K$  совпадают. Точки  $N_1, M_1$  и  $B$  лежат на одной прямой, симметричной прямой  $NMC$ ;  $N_1, P_1, R_1$  — также на одной прямой, симметричной прямой  $NPR$  (рис. 36). Точки  $B, N_1, Q$  и  $K$  лежат на одной окружности, так как  $\angle BN_1K = \angle M_1N_1P_1 = \angle MNP = \angle PQM = \angle BQK$ . Точки  $B, N_1, Q, R_1$  — также на одной окружности, поскольку  $\angle N_1R_1B = \angle N_1P_1P = \angle N_1QP = \angle N_1QB$ . Следовательно, пять точек  $B, N_1, Q, R_1, K$  — на одной окружности; но точки  $N_1, R_1$  и  $K$  — на одной прямой, значит,  $R_1$  и  $K$  сливаются.

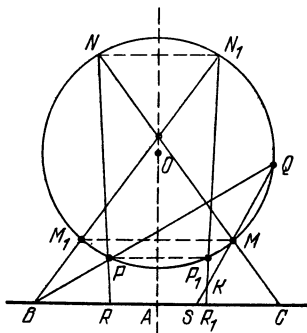


Рис. 36

**187.** Ограничимся случаем, когда  $ABC$  — остроугольный треугольник. Рассмотрим параллелограмм  $A_1MON$  ( $M$  и  $N$  на  $A_1B_1$  и  $A_1C_1$ ). Поскольку  $A_1O$  образует с  $A_1C_1$  и  $A_1B_1$  углы  $(90^\circ - \angle B)$  и  $(90^\circ - \angle C)$ , то

$$\frac{|A_1M|}{|A_1N|} = \frac{|A_1M|}{|MO|} = \frac{\cos B}{\cos C} = \frac{|A_1L|}{|A_1K|}.$$

**188.** Утверждения задачи следуют из факта: если на каждой стороне треугольника построить окружности таким образом, что сумма угловых величин их дуг (расположенных по ту же сторону, что и треугольник), равна  $2\pi$ , то эти окружности имеют общую точку.

**189.** Возьмем точки  $E_1$  и  $F_1$ , симметричные точкам  $E$  и  $F$  относительно  $AB$ . После этого задача сводится к частному случаю задачи II.186.

**190.** Возьмем на продолжении  $AC$  за точку  $C$  точку  $M$  так, что  $|CM| = |CB|$ ; тогда  $E$  — центр окружности, описанной около  $AMB$  ( $|AE| = |BE|$ ,  $\angle AEB = \angle ACB = 2\angle AMB$ ). Из этого следует, что  $F$  — середина  $AM$ , а  $DF$  делит периметр  $\triangle ABC$  пополам. Кроме того,  $DF$  параллельна  $BM$ , а  $BM$  параллельна биссектрисе угла  $C$  треугольника  $ABC$ , т. е.  $DF$  — биссектриса угла  $D$  треугольника  $DKL$ , где  $K$  и  $L$  — середины  $AC$  и  $CB$ .



191. Пусть прямая пересекает стороны  $AC$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  в точках  $M$  и  $N$ . Обозначим:  $|AM| + |AN| = 2l$ . Радиус окружности с центром на  $MN$ , касающейся  $AC$  и  $AB$ , равен  $\frac{S_{AMN}}{l}$ , а по условию

вино  $\frac{S_{AMN}}{l} = \frac{S_{ABC}}{p} = r$ , где  $p$  и  $r$  — соответственно полупериметр и радиус вписанной окружности  $\triangle ABC$ .

192. Докажем, что при гомотетии с центром в  $M$  и коэффициентом  $-1/2$  точка  $N$  переходит в  $I$  (очевидно, что при этой гомотетии  $I$  переходит в  $S$ ). Пусть  $ABC$  — данный треугольник,  $A_0$ ,  $B_0$  и  $C_0$  — соответственно середины сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ ,  $A_1$  — точка на стороне  $BC$  такая, что  $AA_1$  делит периметр пополам. Легко видеть, что  $A_1$  — точка касания со стороной  $BC$  вневписанной окружности, касающейся также продолжений  $AB$  и  $AC$ ,  $A_2$  — точка касания вписанной окружности со стороной  $BC$ . Имеем:  $|BA_2| = |CA_1|$ . Восставим к  $BC$  в точке  $A_2$  перпендикуляр, обозначим через  $D$  точку его пересечения с  $AA_1$ . Повторяя рассуждения, проведенные в решении задачи II.179, докажем, что  $|A_2I| = |ID|$ . Следовательно, прямая  $A_0I$  параллельна  $AA_1$ . Если сделать гомотетию, о которой говорилось в начале, то прямая  $AA_1$  перейдет в прямую  $A_0I$ . Точно так же другие две прямые, делящие пополам периметр, перейдут соответственно в  $B_0I$  и  $C_0I$ . Значит, все эти три прямые пересекаются в такой точке  $N$ , которая переходит в  $I$  при этой гомотетии. Из этого следует утверждение задачи.

193. а) Воспользовавшись для правой части формулами  $r = \frac{S}{p}$ ,

$$R = \frac{abc}{4S}, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \text{где } S \text{ — площадь треугольника}$$

$ABC$ , легко докажем требуемое соотношение.

б) Воспользуйтесь формулой Лейбница (задача II.140), взяв в качестве  $M$  центр описанного круга.

в) Воспользуйтесь формулой Лейбница (задача II.140), взяв в качестве  $M$  центр вписанного круга. Для вычисления, например,  $|MA|^2$  опустим перпендикуляр  $MK$  на  $AB$ ; имеем:  $|MK| = r$ ,  $|AK| = p - a$ ; значит,  $|AM|^2 = (p - a)^2 + r^2$ . Аналогично вычисляются  $|MB|^2$  и  $|MC|^2$ . При упрощении правой части воспользуйтесь результатом пункта а).

г) Пусть  $M$  — точка пересечения биссектрисы угла  $B$  с описанной окружностью. Если  $|IO| = d$ , то  $|BI| \cdot |IM| = R^2 - d^2$ . Треугольник  $ICM$  равнобедренный ( $|IM| = |CM|$ ), так как  $\angle CIM = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$  и

$$\angle ICM = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C). \quad \text{Следовательно,}$$

$$R^2 - d^2 = |BI| \cdot |IM| = |BI| \cdot |CM| = \frac{r}{\sin \frac{B}{2}} \cdot 2R \sin \frac{B}{2} = 2Rr.$$

д) Доказывается аналогично пункту г).

е) Расстояние между проекциями  $I$  и  $I_a$  на  $AC$  равно  $a$ . Возьмем точку  $K$  так, что  $IK \parallel AC$ ,  $I_aK \perp AC$ . В прямоугольном треугольнике

$IKI_a$  имеем:  $\angle KII_a = \frac{1}{2} \angle A$ ,  $|IK| = a$ ,  $|I_aK| = r_a - r$ . Таким образом,  

$$|II_a|^2 = \frac{|IK|^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{a}{\sin A} 2|IK| \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 4R(r_a - r).$$

**194.** Проведем через  $O$  прямые, параллельные  $AB$  и  $AC$ , и обозначим через  $L$  и  $K$  точки пересечения этих прямых с перпендикулярами, опущенными из  $I_a$  соответственно на  $AB$  и  $AC$ . Докажем подобие треугольников  $AB_1C_1$  и  $OLK$ . Имеем:  $\angle B_1AC_1 = \angle LOK$ ,  $|AB_1| = \frac{bc}{c+a}$ ,

$|AC_1| = \frac{bc}{b+a}$ ,  $|OL| = p - \frac{c}{2} = \frac{1}{2}(a+b)$ ,  $|OK| = p - \frac{b}{2} = \frac{1}{2}(a+c)$ ; таким образом,  $\frac{|AB_1|}{|OL|} = \frac{|AC_1|}{|OK|} = \frac{2bc}{(c+a)(b+a)}$ . Но  $OI_a$  — диаметр

окружности, описанной около  $\triangle OIK$ . Следовательно,  $|B_1C_1| = \frac{2bc}{(c+a)(b+a)} |IK| = \frac{2bc}{(c+a)(b+a)} |OI_a| \sin A = \frac{abc}{(c+a)(b+a)R} \cdot |OI_a|$ .

**196.** Докажите, что площадь  $Q_a$  треугольника с вершинами в точках касания вневписанной окружности с центром  $I_a$  можно вычислить по формуле  $Q_a = S_{ABC} \frac{r_a}{2R} = \frac{S_{ABC}^2}{2R(p-a)}$ , где все обозначения те же, что и в задаче II.193. Аналогичные формулы могут быть получены для площадей других треугольников. (См. решение задачи I.240.)

**197.** Пусть  $O$  — центр описанной около  $\triangle ABC$  окружности,  $B_1$  — середина  $AC$ ,  $N$  — точка касания с  $AC$  вписанной окружности; тогда  $|AN| = p - a$ ,  $|CN| = p - c$  (см. задачу I.18),  $|ON|^2 = |OB_1|^2 + |B_1N|^2 = |AO|^2 - |AB_1|^2 + |B_1N|^2 = R^2 - \frac{b^2}{4} + \left(p - a - \frac{b}{2}\right)^2 = R^2 - (p - a)(p - c)$ . Аналогично определив квадраты расстояний до других точек касания и сложив их, получим, что искомая сумма равна  $3R^2 - (p - a)(p - c) - (p - c)(p - b) - (p - b)(p - a) = 3R^2 - M$ . Воспользовавшись для площади треугольника формулой Герона и формулами  $S = pr$ ,  $S = \frac{abc}{4R}$ , получим  $r^2 = \frac{(p - a)(p - b)(p - c)}{p}$ ,  $4Rr = \frac{abc}{p}$ . Сложив последние равенства и воспользовавшись тождеством  $(p - a)(p - b)(p - c) + abc = p((p - a)(p - b) + (p - b)(p - c) + (p - c)(p - a)) = pM$ , найдем, что  $M = 4Rr + r^2$ . Ответ:  $3R^2 - 4Rr - r^2$ .

**198.** Произведение длин отрезков от вершины  $A$  треугольника  $ABC$  до точек пересечения стороны  $AB$  с данной окружностью будет равно такому же произведению для стороны  $AC$ . Каждый из этих отрезков легко выразить через стороны треугольника и рассматриваемые хорды. Таким образом получим систему из трех уравнений, позволяющую выразить хорды через стороны треугольника. Чтобы избежать перебора вариантов, удобно выбрать какое-то направление обхода треугольника и считать отрезки направленными, а их длины — произвольными действительными числами.

**199.** Пусть  $K_1$  и  $L_1$  — такие точки на  $BC$  и  $BA$ , что  $K_1K \parallel L_1L \parallel B_1B$ . Достаточно доказать, что треугольники  $BK_1K$  и  $BL_1L$  подобны, т. е.  $\frac{|BK_1|}{|K_1K|} = \frac{|BL_1|}{|L_1L|}$ . Имеем:  $\frac{|BK_1|}{|BA_1|} = \frac{|B_1K|}{|B_1A_1|}$ ,  $\frac{|K_1K|}{|BB_1|} = \frac{|A_1K|}{|B_1A_1|}$ , и по свойству биссектрисы (задача I.9)  $\frac{|BK_1|}{|K_1K|} = \frac{|B_1K|}{|A_1K|} \cdot \frac{|BA_1|}{|BB_1|} = \frac{|CB_1|}{|CA_1|} \cdot \frac{|BA_1|}{|BB_1|} = \frac{c}{b} \cdot \frac{|CB_1|}{|BB_1|} = \frac{ca}{(c+a)|BB_1|}$ . Последнее выражение симметрично относительно  $a$  и  $c$ , а значит, оно равно также и  $\frac{|BL_1|}{|L_1L|}$ .

**200.** Пусть  $\angle KAL = \angle KLA = \varphi$ ,  $\angle KCL = \angle LKC = \psi$ . Тогда  $\angle BKL = 2\varphi$ ,  $\angle BLK = 2\psi$ ,  $2\varphi + 2\psi = 180^\circ - \angle B$ . Если  $Q$  — точка пересечения  $AL$  и  $KC$ , то  $\angle AQC = 180^\circ - (\varphi + \psi) = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle B$ . Проведем через  $M$  прямую, параллельную  $BC$ , до пересечения с  $KC$  в точке  $N$ , тогда  $MQ$  — биссектриса угла  $AMN$  и  $\angle AQN = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle B$ . Отсюда следует, что  $Q$  — точка пересечения биссектрис треугольника  $AMN$  (см. задачу I.46); значит,  $\triangle AMN$  подобен  $\triangle KBL$ , а  $\triangle KMN$  подобен  $\triangle KBC$ . Пусть  $|AK| = |KL| = |LC| = x$ ,  $|AM| = y$ ,  $|MN| = z$ . Тогда  $\frac{z}{a-x} = \frac{y}{c-x}$ ,  $\frac{y-x}{c-x} = \frac{z}{a}$ , откуда  $y = a$ .

**201.** Пусть  $B_1$  — середина  $AC$ . Продолжим биссектрису до пересечения в точке  $B_2$  с перпендикуляром, восстановленным к  $AC$  в точке  $B_1$ . Точка  $B_2$  лежит на описанной окружности. Проведем через  $M$  перпендикуляр к  $AC$ ; пусть  $L$  — точка его пересечения с  $AC$ ,  $K$  — с  $BB_1$ , тогда  $|KM| = |ML|$ . Проведем через  $K$  прямую, параллельную  $AC$ , пересекающую  $AB$  и  $BC$  соответственно в точках  $D$  и  $E$ . Если  $G$  и  $F$  — проекции  $D$  и  $E$  соответственно на  $AC$ , то  $M$  — центр прямоугольника  $GDEF$ , причем  $\triangle DME$  подобен  $\triangle AB_2C$  ( $\triangle DME$  получается из  $\triangle AB_2C$  при гомотетии с центром в  $B$ ). Имеем:  $\text{ctg } \angle MCL = \frac{|LC|}{|ML|} = \frac{|LF|}{|ML|} + \frac{|FC|}{|ML|} = \frac{|AB_1|}{|B_1B_2|} + 2 \frac{|FC|}{|EF|} = \text{ctg } \frac{B}{2} + 2 \text{ctg } C$ . Если теперь  $B'$  — основание биссектрисы,  $P$  и  $T$  — проекции  $N$  и  $B'$  соответственно на  $BC$ , то  $\text{ctg } \angle NCB = \frac{|PC|}{|NP|} = \frac{|PT|}{|NP|} + \frac{|TC|}{|NP|} = \frac{|BP|}{|NP|} + 2 \frac{|TC|}{|B'T|} = \text{ctg } \frac{B}{2} + 2 \text{ctg } C$ , т. е.  $\angle MCA = \angle NCB$ .

**202.** а) Эта известная задача имеет много различных доказательств. Приведем одно из них, основанное на следующем признаке равенства треугольников. Два треугольника равны, если они имеют соответственно равные стороны, противолежащие углы и биссектрисы этих углов. Докажем этот признак. Рассмотрим два треугольника  $ACB$  и  $ACB_1$ , в которых  $\angle B = \angle B_1$  ( $B$  и  $B_1$  по одну сторону от  $AC$ ). Эти треугольники имеют общую описанную окружность. Можно считать,

что  $B$  и  $B_1$  лежат по одну сторону от диаметра этой окружности, перпендикулярного  $AC$ . Пусть биссектриса угла  $B$  пересекает  $AC$  в точке  $D$ , а биссектриса угла  $B_1$  — в точке  $D_1$ ,  $M$  — середина  $AC$ ,  $N$  — середина дуги  $AC$ , не содержащей точек  $B$  и  $B_1$ . Точки  $B$ ,  $D$  и  $N$  — на одной прямой, точки  $B_1$ ,  $D_1$  и  $N$  — также. Пусть  $B$  и  $B_1$  не совпадают, а значит не совпадают также  $D$  и  $D_1$ . Предположим, что  $|MD| > |MD_1|$ ; тогда  $|BN| < |B_1N|$ ,  $|DN| > |D_1N|$ . Следовательно,  $|B_1D_1| = |B_1N| - |ND_1| > |BN| - |ND| = |BD|$  — противоречие. Пусть теперь в  $\triangle ABC$  биссектриса  $AA_1$  равна биссектрисе  $CC_1$ . Применим только что доказанный признак к треугольникам  $BAA_1$  и  $BCC_1$ .

б) Если обе внешние биссектрисы углов  $A$  и  $C$  треугольника  $ABC$  расположены внутри угла  $B$ , то доказательство можно провести точно так же, как и в пункте а).

Пусть эти биссектрисы расположены вне угла  $B$ . Будем считать, что  $|BC| > |BA|$ . Возьмем на  $CB$  точку  $B_1$  так, что  $|CB_1| = |AB_1|$ . Обозначим  $\angle B_1AC = \angle BCA = \alpha$ ,  $\angle B_1AB = \varphi$ ,  $L$  — точка пересечения внешней биссектрисы угла  $C$  с  $AB$ ,  $M$  — точка пересечения внешней биссектрисы угла  $A$  с  $CB$ . Остальные обозначения понятны из рис. 37.

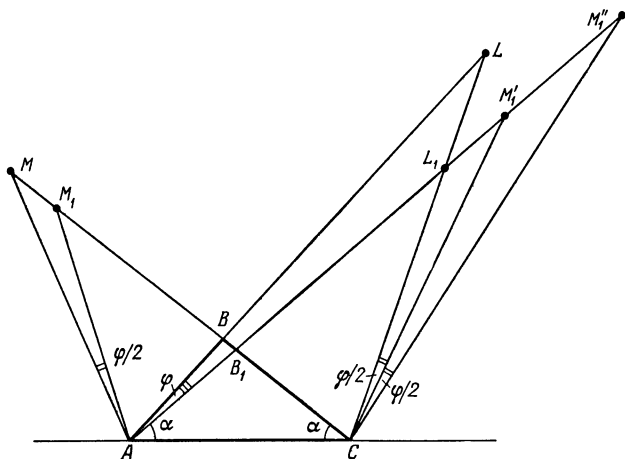


Рис. 37

По условию  $|CL| = |AM|$ , кроме того,  $|CL_1| = |AM_1|$ , так как  $\triangle B_1AC$  — равнобедренный,  $|CM_1'| = |AM|$ , поскольку  $\triangle CL_1M_1' = \triangle AM_1M$ . Далее  $|CM_1''| > |CM_1'|$ , так как  $\angle M_1''M_1'C > \angle M_1'CA > 90^\circ$ . С другой стороны, точки  $C$ ,  $A$ ,  $L$  и  $M_1''$  лежат на одной окружности, в которой острый угол, опирающийся на  $LC$  ( $\angle LAC$ ) больше острого угла, опирающегося на  $M_1''C$ . Значит,  $|AM| = |CM_1'| < |CM_1''| < |CL|$ . Противоречие.

В общем случае из равенства внешних биссектрис не следует равнобедренность треугольника. В задаче I.256 дается пример такого треугольника.

**203.** Пусть  $ABC$  — данный треугольник,  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  — биссектрисы. Если  $|A_1B_1| = |A_1C_1|$ , то или  $\angle A_1B_1C = \angle A_1C_1B$  (в этом случае  $\triangle ABC$  будет равнобедренным) или  $\angle A_1B_1C + \angle A_1C_1B = 180^\circ$ . Во втором случае повернем  $\triangle A_1B_1C$  вокруг точки  $A_1$  на угол  $B_1A_1C_1$ . В результате треугольники  $A_1C_1B$  и  $A_1B_1C$  окажутся приложенными друг к другу и образуют треугольник, подобный  $\triangle ABC$ . Если стороны  $\triangle ABC$  есть  $a$ ,  $b$  и  $c$ , то стороны получившегося треугольника будут равны  $\frac{ac}{b+c}$ ,  $\frac{ab}{b+c}$  и  $\frac{ac}{a+b} + \frac{ab}{a+c}$ . Учитывая их подобие, получим:

$$\frac{c}{a+b} + \frac{b}{a+c} = \frac{a}{b+c} \Leftrightarrow b^3 + c^3 - a^3 + b^2c + b^2a + c^2b + c^2a - a^2b - a^2c + abc = 0. \quad (1)$$

Обозначим:  $\cos \angle BAC = x$ . По теореме косинусов  $b^2 + c^2 - a^2 = 2bcx$ . Умножая последнее равенство последовательно на  $a$ ,  $b$  и  $c$  и вычитая из (1), получим

$$2x(a+b+c) + a = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{2(b+c)x}{2x+1}.$$

Поскольку  $0 < a < b+c$ , то

$$-\frac{1}{4} < x < 0. \quad (2)$$

Заменив в теореме косинусов  $a$  через  $b$ ,  $c$  и  $x$  и обозначив  $b/c = \lambda$ , получим для  $\lambda$  уравнение  $(4x+1)\lambda^2 - 2\lambda(4x^3 + 8x^2 + x) + 4x+1 = 0$ . Для того чтобы это уравнение при условиях (2) имело решение ( $\lambda > 0$ ,  $\lambda \neq 1$ ) должны выполняться неравенства

$$4x^3 + 8x^2 + x > 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}D &= (4x^3 + 8x^2 + x)^2 - (4x+1)^2 = \\ &= (2x+1)^2(x+1)(2x-1)(2x^2+5x+1) > 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $D$  — дискриминант квадратного уравнения. Система неравенств (2),

$$(3), (4) \text{ удовлетворяется при } -\frac{1}{4} < x < \frac{\sqrt{17}-5}{4}.$$

Таким образом, исходный треугольник — не обязательно равнобедренный. Однако доказано, что это может иметь место только в том случае, когда один из углов исходного треугольника тупой и его коси-

нус находится в интервале  $\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{17}-5}{4}\right)$ , что соответствует углу

приблизительно от  $102^\circ 40'$  до  $104^\circ 28'$ . Если  $x = -\frac{1}{4}$ , построенный

треугольник будет вырождаться, при  $x = \frac{\sqrt{17}-5}{4}$  будем иметь

$\angle A_1B_1C = \angle A_1C_1B = 90^\circ$ , т. е. два случая, которые выделены в начале решения, для этого значения угла совпадают.

**204.** Пусть  $M$  — точка пересечения  $AD$  и  $KL$ :

$$\frac{|KM|}{|ML|} = \frac{S_{AKD}}{S_{ALD}} = \frac{\frac{1}{2}|AK| \cdot |AD| \sin \angle KAD}{\frac{1}{2}|DL| \cdot |AD| \sin \angle ADL} = \frac{|AK| \cdot |CD|}{|DL| \cdot |AF|}.$$

(Использовано то, что синусы вписанных углов пропорциональны хордам.) Аналогично, если  $M_1$  — точка пересечения  $BE$  и  $KL$ , то получим:

$$\frac{|KM_1|}{|M_1L|} = \frac{|BK| \cdot |FE|}{|LE| \cdot |BC|}. \text{ Но из подобия } \triangle AKF \text{ и } \triangle BKC, \triangle CID \text{ и } \triangle FLE \text{ имеем: } \frac{|AK|}{|AF|} = \frac{|BK|}{|BC|}, \frac{|CD|}{|DL|} = \frac{|FE|}{|LE|}; \text{ перемножив эти равенства, получим, что } \frac{|KM|}{|ML|} = \frac{|KM_1|}{|M_1L|}, \text{ т. е. } M \text{ и } M_1 \text{ совпадают.}$$

**З а м е ч а н и е.** Можно показать, что утверждение задачи сохраняется, если  $A, B, C, D, E$  и  $F$  — произвольные шесть точек на окружности. Обычно теорема Паскаля формулируется следующим образом: если  $A, B, C, D, E, F$  — точки на окружности, то три точки, в которых пересекаются прямые  $AB$  и  $DE$ ,  $BC$  и  $EF$ ,  $CD$  и  $FA$ , лежат на одной прямой.

**205.** Пусть  $N$  — точка пересечения прямой  $A_2A_1$  с окружностью, отличная от  $A_2$ . Применим к шестиугольнику  $ABCC_2NA_2$  (возможно самопересекающемуся) теорему Паскаля (задача II.204). Точки пересечения прямых  $AB$  и  $C_2N$ ,  $BC$  и  $NA_2$  (точка  $A_1$ ),  $CC_2$  и  $AA_2$  (точка  $M$ ) лежат на одной прямой. Следовательно,  $AB$  и  $C_2N$  пересекаются в точке  $C_1$ .

**206.** Пусть данные взаимно перпендикулярные прямые — оси  $x$  и  $y$  прямоугольной системы координат. Тогда высоты треугольника лежат на прямых  $y = k_i x$  ( $i = 1, 2, 3$ ); стороны треугольника при этом должны иметь угловые коэффициенты  $-\frac{1}{k_i}$ , а из условия принадлежности вершин  $(x_i, y_i)$  высотам находим отношения свободных членов  $\dot{c}_i$  в уравнениях сторон  $k_i y + x = c_i$ :  $c_1 = k_1 y_3 + x_3$ ,  $c_2 = k_2 y_3 + x_3$ ,  $y_3 = -\frac{c_1}{k_3} = \frac{k_1 k_3 + 1}{k_2 k_3 + 1}$ , и т. п. При подходящем выборе единицы длины можно взять  $c_i = \frac{k_i}{k + k_i}$ , где  $k = k_1 k_2 k_3$ . Точки пересечения прямой  $k_i y + x = \frac{k_i}{k + k_i}$  с осями:  $\left(0, \frac{1}{k + k_i}\right)$  и  $\left(\frac{k_i}{k + k_i}, 0\right)$ , середина  $(P_i)$  отрезка между ними  $\left(\frac{k_i}{2(k + k_i)}, \frac{1}{2(k + k_i)}\right)$ . Угловой коэффициент прямой  $P_1 P_2$  равен  $\left(\frac{1}{2(k + k_2)} - \frac{1}{2(k + k_1)}\right) : \left(\frac{k_2}{2(k + k_2)} - \frac{k_1}{2(k + k_1)}\right) =$

$= (k_1 - k_2) : (kk_2 - kk_1) = -\frac{1}{k}$ . Точно такими же будут угловые коэффициенты прямых  $P_2P_3$  и  $P_3P_1$ . Поэтому точки  $P_1, P_2, P_3$  лежат на одной прямой (ее уравнение:  $ky + x = 1/2$ ).

**З а м е ч а н и е.** Соединив прямыми точку  $H$  пересечения высот треугольника с точками  $P_1, P_2, P_3$ , получаем любопытное следствие. Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — углы треугольника, перечисленные против часовой стрелки,  $a_1, a_2, a_3$  — прямые, на которых лежат противоположные им стороны; через точку  $H$  проходят три прямые  $p_1, p_2, p_3$  так, что углы между  $p_2$  и  $p_3, p_3$  и  $p_1, p_1$  и  $p_3$  (отсчитываемые против часовой стрелки) равны соответственно  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Тогда точки пересечения  $p_1$  с  $a_1, p_2$  с  $a_2, p_3$  с  $a_3$  лежат на одной прямой. Предлагаем читателю рассмотреть частные случаи этой теоремы (многие из них — красивые и далеко не очевидные геометрические факты) и сопоставить ее с задачей.

Еще одно замечание: в нашей задаче вместо середин отрезков, отсекаемых на сторонах треугольника, можно было бы брать точки, делящие их в одинаковых отношениях. Эти точки также окажутся на одной прямой.

**207.** Для определения углов треугольника  $A_1B_1C_1$  воспользуйтесь тем, что точки  $P, A_1, B_1, C_1$  лежат на одной окружности (так же для других четверок точек). Если  $P$  внутри треугольника  $ABC$ , то  $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_2C_2B_2 = \angle APB = \angle ACB$ . Для разностороннего треугольника  $ABC$  существуют восемь различных точек  $P$  таких, что соответствующие треугольники  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  подобны треугольнику  $ABC$  (при этом треугольник  $A_2B_2C_2$  ему равен). Причем шесть точек лежат внутри описанной около треугольника  $ABC$  окружности, а две — вне ее.

**208.** Рассматриваемые прямые являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника  $A_1B_1C_1$ .

**209.** Обозначения:  $ABC$  — данный треугольник,  $M$  — точка, находящаяся на расстоянии  $d$  от центра описанной около  $ABC$  окружности,  $A_1, B_1, C_1$  — основания перпендикуляров, опущенных из  $M$  на  $BC, CA, AB, A_2, B_2, C_2$  — точки пересечения соответственно  $AM, BM, CM$  с описанной около  $\triangle ABC$  окружностью,  $a, b, c$  — стороны  $\triangle ABC, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  — стороны соответственно треугольников  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2, S, S_1$  и  $S_2$  — соответственно площади этих треугольников. Имеем:

$$a_1 = |AM| \sin A = |AM| \frac{a}{2R}. \quad (1)$$

Аналогично находятся  $b_1$  и  $c_1$ . Из подобия треугольников  $B_2MC_2$  и  $BMC$  получим:

$$\frac{a_2}{a} = \frac{|B_2M|}{|CM|} = \frac{|C_2M|}{|BM|}. \quad (2)$$

Аналогичные отношения будут для  $\frac{b_2}{b}$  и  $\frac{c_2}{c}$ . Треугольники  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  подобны (см. задачу П.207); кроме того,

$$\frac{S_2}{S} = \frac{a_2 b_2 c_2}{abc}. \quad (3)$$

Учитывая все это, будем иметь:

$$\begin{aligned} \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^3 &= \frac{S_1^3}{S_2^3} \cdot \frac{S_2^3}{S^3} = \\ &= \frac{a_1^2 b_1^2 c_1^2}{a_2^2 b_2^2 c_2^2} \cdot \frac{a_2^3 b_2^3 c_2^3}{a^3 b^3 c^3} = \left(\frac{1}{4R^2}\right)^3 \frac{|AM|^2 |BM|^2 |CM|^2 a^2 b^2 c^2}{a^3 b^3 c^3} \cdot a_2 b_2 c_2 = \\ &= \left(\frac{1}{4R^2}\right)^3 |AM|^2 |BM|^2 |CM|^2 \cdot \frac{|B_2 M|}{|CM|} \frac{|C_2 M|}{|AM|} \frac{|A_2 M|}{|BM|} = \\ &= \left(\frac{1}{4R^2}\right)^3 |R^2 - d^2|^3. \end{aligned}$$

(Во втором равенстве использовалось подобие  $\triangle A_1 B_1 C_1$  и  $\triangle A_2 B_2 C_2$  и равенство (3), в третьем — формулы (1), в четвертом — формулы (2)).  
З а м е ч а н и е. При  $d = R$  площадь треугольника, образованного основаниями перпендикуляров, оказывается равной нулю, т. е. эти основания расположены на одной прямой. Прямая эта называется прямой Симсона (см. задачу II.153).

**210.** Утверждение следует из более общего факта: если на сторонах треугольника построены окружности таким образом, что их дуги, расположенные вне треугольника в сумме измеряются  $4\pi$  или  $2\pi$ , то эти окружности имеют общую точку (в нашем случае в качестве такого треугольника можно взять треугольник с вершинами в серединах  $\triangle ABC$  и доказать, что три окружности, проходящие через середины  $AB$ ,  $AC$  и  $AD$ ;  $BA$ ,  $BC$  и  $BD$ ;  $CA$ ,  $CB$  и  $CD$ , имеют общую точку).

**211.** Утверждение вытекает из следующего факта. Пусть произвольная окружность пересекает стороны угла с вершиной  $N$  в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ ,  $D$ ; перпендикуляры, восставленные к сторонам угла в точках  $A$  и  $D$ , пересекаются в точке  $K$ , а перпендикуляры, восставленные в точках  $B$  и  $C$ , пересекаются в точке  $L$ . Тогда прямые  $NK$  и  $NL$  симметричны относительно биссектрисы этого угла. В самом деле,  $\angle ANK = \angle ADK$  (точки  $A$ ,  $K$ ,  $D$  и  $N$  — на одной окружности). Точно так же  $\angle LNC = \angle LBC$ . Затем  $\angle ADK = 90^\circ - \angle ADN = 90^\circ - \angle NBC = \angle LBC$ . (Предполагалось, что  $ABCD$  — несамопересекающийся четырехугольник.)

**212.** Пусть  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  — данные точки,  $D_1$  — точка пересечения прямых, симметричных прямым  $AD$ ,  $BD$  и  $CD$  относительно соответствующих биссектрис  $\triangle ABC$ . В предыдущей задаче было доказано, что pedalные окружности точек  $D$  и  $D_1$  относительно  $\triangle ABC$  совпадают. Пусть прямые, симметричные прямым  $BA$ ,  $CA$  и  $DA$  относительно соответствующих биссектрис  $\triangle BCD$ , пересекаются в точке  $A_1$ . Нетрудно доказать, что  $A_1$  и  $D_1$  симметричны друг другу относительно прямой  $CB$ . Следовательно, pedalные окружности точек  $D$  (или  $D_1$ ) относительно  $\triangle ABC$  и  $A$  (или  $A_1$ ) относительно  $\triangle BCD$  проходят через середину  $D_1 A_1$ . Определив аналогично точки  $B_1$  и  $C_1$ , увидим, что каждая из рассматриваемых pedalных окружностей проходит через середины соответствующих отрезков, соединяющих точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  и  $D_1$ . Таким образом, задача свелась к задаче II.210.

**213.** Пусть  $B_2$  и  $C_2$  — точки, диаметрально противоположные точкам  $B$  и  $C$ ,  $M$  — вторая точка пересечения  $B_2 B_1$  с описанной около  $\triangle ABC$  окружностью,  $C'_1$  — точка пересечения  $AB$  и  $C_2 M$ . По теореме



Паскаля (задача II.204), примененной к шестиугольнику  $AB_2CMBC_2$ , точки  $O$  (центр окружности),  $B_1$  и  $C'_1$  лежат на одной прямой, т. е.  $C'_1$  совпадает с  $C_1$ . Но  $\angle BMB_1 = \angle BMB_2 = 90^\circ$ ,  $\angle CMC_1 = \angle CMC_2 = 90^\circ$ ; значит,  $M$  — одна из точек пересечения окружностей с диаметрами  $BB_1$  и  $CC_1$ . Пусть  $N$  — вторая точка пересечения этих окружностей. Их общая хорда  $MN$  содержит точку пересечения высот треугольника  $ABC$  — точку  $H$  (задача II.19). Если  $BB_0$  — высота  $\triangle ABC$ , то  $|MH| \cdot |HN| = |BH| \cdot |HB_0|$ . Значит (см. задачу II.164),  $N$  лежит на окружности девяти точек  $\triangle ABC$ .

**218.** Пусть радиус окружности равен  $r$ , а углы между соседними радиусами, проведенными в точки касания, в порядке обхода равны  $2\alpha$ ,  $2\beta$ ,  $2\gamma$ ,  $2\delta$  ( $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$ ). Тогда

$$S = r^2 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \delta). \quad (1)$$

Стороны четырехугольника будут равны (найдем одну)  $r(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = r \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$  и т. д. Поскольку  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\gamma + \delta)$ ,  $\sin(\beta + \gamma) = \sin(\alpha + \delta)$ , то формула, данная в условии, приводится к виду

$$S = r^2 \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\beta + \gamma) \sin(\gamma + \alpha)}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \cos \delta}. \quad (2)$$

Осталось доказать равенство правых частей (1) и (2) при условии, что  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$ .

**219.** Докажем, что  $S_{BNA} = S_{BMC} + S_{AMD}$ . Если  $\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|CN|}{|ND|} = \lambda$ , то  $S_{BMC} = (1 - \lambda)S_{BAC}$ ,  $S_{AMD} = \lambda S_{BAD}$ . С другой стороны, обозначив через  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h$  расстояния от  $C$ ,  $D$  и  $N$  до  $AB$ , найдем, что  $h = \lambda h_1 + (1 - \lambda)h_2$ . Следовательно,  $S_{ABN} = \frac{1}{2}|AB| \cdot h = \lambda \frac{1}{2}|AB|h_1 + (1 - \lambda)\frac{1}{2}|AB|h_2 = \lambda S_{ABD} + (1 - \lambda)S_{BAC} = S_{AMD} + S_{BMC}$ .

**221.** Углы между сторонами, а также между сторонами и диагоналями четырехугольника  $Q_2$  выражаются через углы между сторонами и сторонами и диагоналями четырехугольника  $Q_1$ . (Диагонали четырехугольника  $Q_2$  перпендикулярны соответствующим диагоналям четырехугольника  $Q_1$  и проходят через их середины.)

**222.** Рассмотрите параллелограммы  $ABMK$  и  $DCML$  и докажите, что  $KL$  делит  $DA$  в том же отношении, что и точка  $N$ , а прямая  $MN$  является биссектрисой угла  $KML$ .

**223.** Докажем сначала, что диагонали данного четырехугольника делятся в точке пересечения пополам, т. е. что четырехугольник — параллелограмм. Пусть  $ABCD$  — данный четырехугольник,  $O$  — точка пересечения диагоналей. Допустим, что  $|BO| < |OD|$ ,  $|AO| \leq |OC|$ ; рассмотрим  $\triangle OA_1B_1$ , симметричный  $\triangle OAB$  относительно точки  $O$ ; очевидно, радиус окружности, вписанной в  $\triangle OA_1B_1$ , меньше радиуса окружности, вписанной в  $\triangle OCD$ , а по условию они равны. Итак,  $O$  — середина обеих диагоналей. Докажем, что все стороны четырехугольника равны. Воспользуемся формулой  $S = pr$  ( $S$  — площадь,  $p$  — полупериметр,  $r$  — радиус вписанной окружности треугольника).

Поскольку у  $\triangle ABO$  и  $\triangle BOC$  площади и радиусы вписанных окружностей равны, то равны и их периметры, т. е.  $|AB| = |BC|$ .

**224.** Аналогично тому, как это было сделано в предыдущей задаче, докажите, что диагонали четырехугольника делятся пополам точкой пересечения.

**225.** Из условия задачи следует, что  $ABCD$  (рис. 38) — выпуклый четырехугольник. Рассмотрим параллелограмм  $ACC_1A_1$ , у которого стороны  $AA_1$  и  $CC_1$  равны и параллельны диагонали  $BD$ . Треугольники  $ADA_1$ ,  $CDC_1$  и  $C_1DA_1$ , равны соответственно треугольникам  $ABD$ ,  $B CD$  и  $ABC$ . Следовательно, отрезки, соединяющие  $D$  с вершинами  $A$ ,  $C$ ,  $C_1$ ,  $A_1$ , делят параллелограмм на четыре треугольника, у которых равны радиусы вписанных окружностей. Если  $O$  — точка пересечения диагоналей параллелограмма  $ACC_1A_1$ , то  $D$  должна совпадать с  $O$  (если  $D$ , например, внутри  $\triangle COC_1$ , то радиус окружности, вписанной в  $\triangle ADA_1$ , больше радиуса окружности, вписанной в  $\triangle AOA_1$  и тем более в  $\triangle CDC_1$ ). Таким образом,  $ABCD$  — параллелограмм, но, кроме того, из задачи П.223 следует, что  $ACC_1A_1$  — ромб, т. е.  $ABCD$  — прямоугольник.

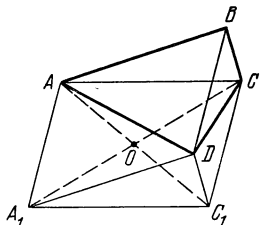


Рис. 38

**226.** Необходимым и достаточным условием выполнения всех четырех пунктов является равенство  $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$ . Для пунктов а) и б) это следует из теоремы о биссектрисе внутреннего угла треугольника, для пунктов в) и г) — из результата задачи I.234.

**227.** Пусть  $ABCD$  — данный четырехугольник. Будем считать, что углы  $A$  и  $D$  — тупые,  $B$  и  $C$  — острые. Обозначим основания перпендикуляров, опущенных из вершины  $A$ , через  $M$  и  $N$ , а из вершины  $C$  — через  $K$  и  $L$  (рис. 39, а),  $R$  — точка пересечения  $MN$  и  $LK$ . Заметим, что

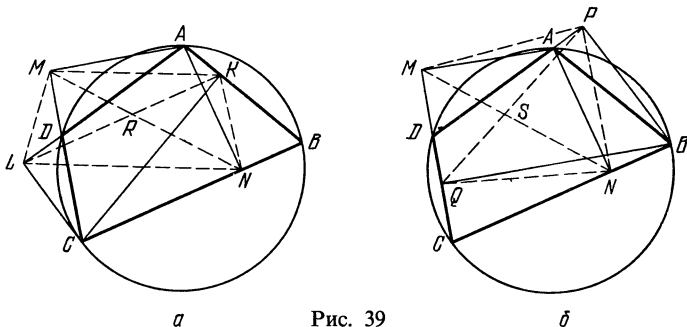


Рис. 39

$A$ ,  $K$ ,  $N$ ,  $C$ ,  $L$ ,  $M$  лежат на одной окружности с диаметром  $AC$ . Покажем, что  $MK \parallel LN$ :  $\angle MKL = \angle MAL = 90^\circ - \angle B = \angle KCB = \angle KLN$ . Таким образом,  $\frac{|MR|}{|RN|} = \frac{|MK|}{|LN|} = \frac{\sin \angle MCK}{\sin \angle LAN} = \frac{\sin(\angle C + \angle B - 90^\circ)}{\sin(\angle A + \angle B - 90^\circ)} = \frac{\cos(\angle A - \angle B)}{\sin(\angle A + \angle B - 90^\circ)}$ . Пусть теперь  $P$  и

$Q$  — основания перпендикуляров, опущенных из вершины  $B$ , а  $S$  — точка пересечения  $MN$  и  $PQ$  (рис. 39, б). Так как  $\angle PNB = \angle PAB = \angle C$ , то  $PN \parallel DC$ , т. е.  $MQNP$  — трапеция ( $ANBP$  — вписанный четырехугольник с диаметром  $AB$ ). Таким образом,  $\frac{|MS|}{|SN|} = \frac{|MQ|}{|PN|} = \frac{|AB| \cos(\angle A + \angle D - 180^\circ)}{|AB| \sin(\angle B + \angle A - 90^\circ)} = \frac{\cos(\angle A - \angle B)}{\sin(\angle A + \angle B - 90^\circ)}$ . (Мы использовали то, что  $MQ$  — проекция  $AB$  на  $DC$ ; угол между  $AB$  и  $DC$  равен  $\angle A + \angle D - 180^\circ$ .) Итак, точки  $R$  и  $S$  делят  $MN$  в одном и том же отношении, т. е. они совпадают; значит, три прямые пересекаются в одной точке. Легко теперь показать, что все четыре прямые пересекаются в этой же точке.

**228.** Найдем, в каком отношении  $BC$  делит  $MN$ . Это отношение равно отношению  $\frac{S_{MCB}}{S_{CBN}} = \frac{|MC| \cos \angle BCD}{|BN| \cos \angle CBA}$ . Аналогично, отношение, в котором  $AD$  делит  $MN$ , равно  $\frac{|AM| \cos \angle BAD}{|ND| \cos \angle ADC}$ . Но эти отношения равны, так как  $\angle BCD = \angle BAD$ ,  $\angle CBA = \angle CDA$ , а  $\triangle AMC$  подобен  $\triangle DNB$ .

**229.** Возьмем точку  $M_1$  так, что  $BCMM_1$  — параллелограмм.  $M_1$  лежит на окружности, проходящей через точки  $B$ ,  $M$  и  $A$ . Поскольку  $|AM_1| = |DM|$  ( $ADMM_1$  — также параллелограмм), треугольники  $CDM$  и  $BAM_1$  равны, т. е. радиус окружности, описанной около  $\triangle CDM$ , равен  $R$ . Таким же будет радиус окружности, описанной около  $\triangle ADM$ .

**230.** Обозначим через  $K$  и  $L$  точки касания данной окружности с прямыми  $AB$  и  $AD$ . Пусть для определенности  $K$  и  $L$  внутри отрезков  $AB$  и  $AD$ . Возьмем на прямой  $CB$  точку  $P$  так, что  $|BP| = |BK|$ ,  $B$  между  $P$  и  $C$ , а на прямой  $CD$  точку  $Q$ ,  $|DQ| = |DL|$ ,  $D$  между  $C$  и  $Q$ . Имеем:  $|CP| = |CB| + |BK| = |CB| + |AB| - |AK| = |CQ|$ . Окружность, проходящая через  $P$  и  $Q$  и касающаяся прямых  $CB$  и  $CD$ , пересечет  $BD$  в таких точках  $M_1$  и  $N_1$ , для которых будут выполняться равенства  $|BM_1| \cdot |BN_1| = |BM| \cdot |BN|$ ;  $|CN_1| \cdot |CM_1| = |CN| \cdot |CM|$ . Из этих равенств можно получить, что  $M_1$  и  $N_1$  должны совпасть с  $M$  и  $N$ . Аналогично рассматриваются другие случаи расположения точек. Можно избежать перебора вариантов, задав на прямых  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  положительные направления и рассматривая направленные отрезки на этих прямых.

**231.** Для определенности будем считать, что  $B$  и  $D$  внутри окружности. Обозначим через  $P$  и  $Q$  точки пересечения прямой  $BD$  с окружностью ( $P$  — ближайшая к  $B$ ), а через  $L$  — точку пересечения  $CB$  с окружностью,  $l$  — касательная к окружности, проходящая через  $C$ .

Рассмотрим треугольник  $PCN$ , из вершин которого выходят прямые  $PQ$ ,  $NM$  и  $l$ . С помощью теоремы Чевы (задача II.44), рассуждая так же, как в задаче II.49, получим, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы прямые  $PQ$ ,  $NM$  и  $l$  пересекались в одной точке, является выполнение равенства

$$\frac{|PM|}{|MC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QN|} \cdot \frac{|NC|}{|CP|} = 1. \quad (1)$$

С другой стороны, в шестиугольнике  $ALPMCQ$  диагонали  $AM$ ,  $LC$ ,  $PQ$  пересекаются в одной точке. Значит (см. задачу II.49)

$$|AL| \cdot |PM| \cdot |CQ| = |LP| \cdot |MC| \cdot |QA|. \quad (2)$$

Очевидно,  $|NC| = |AL|$ ,  $|QN| = |LP|$ ,  $|CP| = |QA|$ . Таким образом, из справедливости равенства (2) следует справедливость равенства (1).

**232.** 1. Поскольку  $O_1$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , то  $\angle BO_1A = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle BCA$  (задача I.46). Значит,  $\angle BO_1A = \angle BO_4A$  и четырехугольник  $ABO_1O_4$  является вписанным (рис. 40, а), следовательно, смежный угол с  $\angle BO_1O_4$  равен  $\angle BAO_4 = \frac{1}{2} \angle BAD$ . Аналогично, угол, смежный с  $\angle BO_1O_2$ , равен  $\frac{1}{2} \angle BCD$ . Но  $\frac{1}{2}(\angle BAD + \angle BCD) = 90^\circ$ ; значит,  $\angle O_4O_1O_2 = 90^\circ$ .

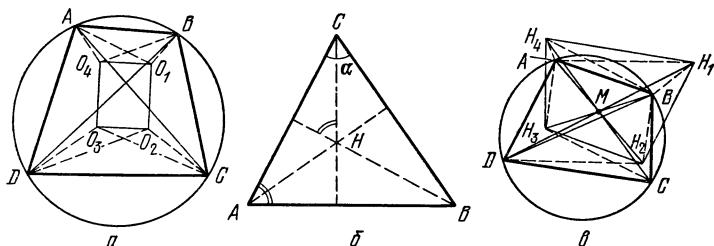


Рис. 40

2. Для доказательства второй части покажем сначала, что расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот полностью определяется величиной угла при этой вершине и длиной противоположной стороны, а именно (рис. 40, б):  $|CH| =$

$= |CB| \frac{\cos \alpha}{\sin \angle CAB} = \frac{|AB|}{\sin \alpha} \cos \alpha = |AB| \operatorname{ctg} \alpha$ . Поскольку четырехугольник  $ABCD$  вписанный, то  $|AH_3| = |BH_2|$  и  $AH_3 \parallel BH_2$ ; значит,  $ABH_2H_3$  — параллелограмм. Таким образом, точка пересечения  $AH_2$  и  $BH_3$  делит  $AH_2$  и  $BH_3$  пополам. Рассматривая другие параллелограммы, получим, что отрезки  $H_2A$ ,  $H_3B$ ,  $H_4C$ ,  $H_1D$  пересекаются в одной точке ( $M$ ) и делятся ею пополам, т. е. четырехугольники  $ABCD$  и  $H_1H_2H_3H_4$  центрально симметричны относительно точки  $M$  (рис. 40, в).

**233.** Если стороны треугольника  $ABC$ , противолежащие вершинам  $A$ ,  $B$  и  $C$ , равны соответственно  $a$ ,  $b$  и  $c$ , а углы  $ADB$ ,  $BDC$  и  $CDA$  равны  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  (считаем, что  $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ ), то расстояния от точки  $D$  до точек пересечения высот треугольников  $ADB$ ,  $BDC$  и  $CDA$  равны абсолютным значениям величин  $c \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $a \operatorname{ctg} \beta$ ,  $b \operatorname{ctg} \gamma$  (см. решение задачи II.232). Нетрудно убедиться, что площадь треугольника с вершинами в точках пересечения высот  $\triangle ADB$ ,  $\triangle BDC$  и  $\triangle CDA$  будет равна  $\frac{1}{2} c \operatorname{ctg} \alpha \cdot a \operatorname{ctg} \beta \sin B + \frac{1}{2} a \operatorname{ctg} \beta \cdot b \operatorname{ctg} \gamma \sin C + \frac{1}{2} b \operatorname{ctg} \gamma \cdot c \operatorname{ctg} \alpha \sin A =$

$= S_{ABC} (\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \alpha) = S_{ABC}$ , поскольку выражение в скобках равно 1. (Докажите это, учитывая, что  $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ .) Аналогично рассматриваются другие случаи расположения точки  $D$  (когда один из углов  $\alpha, \beta, \gamma$  равен сумме двух других).

**234.** а) Пусть  $ABCD$  — данный четырехугольник,  $R$  и  $Q$  — точки касания окружностей, вписанных соответственно в  $\triangle ABC$  и в  $\triangle ACD$  с прямой  $AC$ . Тогда (см. задачу I.18)

$$|RQ| = ||AQ| - |AR|| = \frac{1}{2} (|AB| + |AC| - |BC|) - (|AD| + |AC| - |CD|) = \frac{1}{2} (|AB| + |CD| - |AD| - |BC|).$$

Так как  $ABCD$  — описанный четырехугольник, то  $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$ , т. е.  $|RQ| = 0$ .

б) Если  $K, L, M, N$  — точки касания окружностей со сторонами четырехугольника, а  $K_1, L_1, M_1, N_1$  — точки касания окружностей, вписанных в  $\triangle ABC$  и  $\triangle ACD$  (рис. 41), то  $N_1K_1 \parallel NK, M_1L_1 \parallel ML$ .

Докажем, что и  $K_1L_1 \parallel KL, N_1M_1 \parallel NM$ . Поскольку окружности, вписанные в  $\triangle ACB$  и  $\triangle ACD$ , касаются между собой на диагонали в точке  $P$ , то  $|AN_1| = |AP| = |AM|$ , т. е.  $N_1M_1 \parallel NM$ . Следовательно, четырехугольник  $K_1L_1M_1N_1$ , как и четырехугольник  $KLMN$ , является вписанным.

**235.** Пусть (рис. 42, а, б)  $O_1, O_2, O_3, O_4$  — соответственно центры окружностей, вписанных в  $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA$  и  $\triangle DAB$ . Поскольку  $O_1O_2O_3O_4$  — прямоугольник (см. задачу II.232), то  $|O_1O_3| = |O_2O_4|$ .

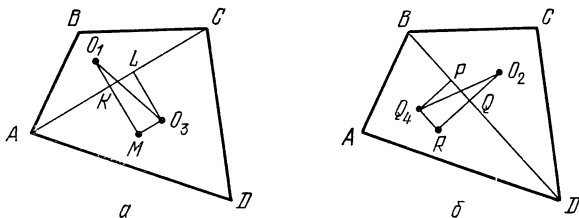


Рис. 42

Если  $K$  и  $L$  — точки касания окружностей, вписанных в  $\triangle ABC$  и  $\triangle ACD$ , с  $AC$ , то  $|KL| = \frac{1}{2} (|AB| + |CD| - |BC| - |AD|)$  (см. решение задачи II.234). Аналогично, если  $P$  и  $Q$  — точки касания соответствующих окружностей с  $BD$ , то  $|PQ| = |KL|$ . Проведем через  $O_3$  прямую, параллельную  $AC$ , до пересечения с продолжением  $O_1K$ . Получим  $\triangle O_1O_3M$ , аналогично построим  $\triangle O_2O_4R$ . Эти два прямоугольных треугольника равны, так как у них  $|O_1O_3| = |O_2O_4|, |O_3M| = |KL| = |PQ| = |O_4R|$ . Значит,  $|O_1M| = |O_2R|$ ; но  $|O_1M|$  равен сумме радиу-

сов окружностей, вписанных в  $\triangle ABC$  и  $\triangle ACD$ , а  $|O_2R|$  равен сумме радиусов окружностей, вписанных в  $\triangle ACD$  и  $\triangle BDA$  (см. также задачу П.315).

**236.** Пусть в четырехугольнике  $ABCD$  (рис. 43)  $|AB|=a$ ,  $|BC|=b$ ,  $|CD|=c$ ,  $|DA|=d$ ,  $|AC|=m$ ,  $|BD|=n$ . Построим на стороне  $AB$  во внешнюю сторону треугольник  $AKB$ , подобный треугольнику  $ACD$ , причем  $\angle BAK = \angle DCA$ ,  $\angle ABK = \angle CAD$ , а на стороне  $AD$  построим  $\triangle AMD$ , подобный  $\triangle ABC$ ,  $\angle DAM = \angle BCA$ ,  $\angle ADM = \angle CAB$ . Из соответствующего подобия получим:  $|AK| = \frac{ac}{m}$ ,  $|AM| = \frac{bd}{m}$ ,

$|KB| = |DM| = \frac{ad}{m}$ . Кроме того,  $\angle KBD +$

$+\angle MDB = \angle CAD + \angle ABD + \angle BDA +$

$+\angle CAB = 180^\circ$ , т. е. четырехугольник  $KBDM$  — параллелограмм. Значит,  $|KM| =$

$= |BD| = n$ . Но  $\angle KAM = \angle A + \angle C$ . По

теореме косинусов для  $\triangle KAM$  имеем:  $n^2 =$

$= \left(\frac{ac}{m}\right)^2 + \left(\frac{bd}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{ac}{m}\right)\left(\frac{bd}{m}\right)\cos(A+C)$ ,

откуда  $m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(A+C)$ .

**237.** Утверждение теоремы Птолемея является следствием теоремы Бретшнейдера (см. задачу П.236), поскольку для вписанного

четырехугольника  $\angle A + \angle C = 180^\circ$ .

**238.** Если  $MB$  — наибольший из отрезков  $|MA|$ ,  $|MB|$ ,  $|MC|$ , то, применив теорему Бретшнейдера (задача П.236) к четырехугольнику  $ABCM$ , получим, что  $|MB|^2 = |MA|^2 + |MC|^2 - 2|MA| \cdot |MC|\cos(\angle AMC + 60^\circ)$ , т. е.  $|MB| < |MA| + |MC|$ , поскольку  $\angle AMC \neq 120^\circ$ .

**239.** Заменив в выражении

$$t_{\alpha\beta}t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma}t_{\delta\alpha} = t_{\alpha\gamma}t_{\beta\delta} \quad (1)$$

отрезки касательных по формулам, полученным при решении задачи I.201, убедимся, что если соотношение (1) выполняется для каких-то окружностей  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$ , касающихся данной соответственно в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , то оно выполняется для любых таких окружностей. Осталось проверить справедливость соотношения (1) для какого-либо частного случая. Если  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  — окружности нулевого радиуса, то получаем обычную теорему Птолемея (задача П.237). Можно, чтобы не ссылаться на теорему Птолемея, взять окружности  $\alpha$  и  $\delta$  нулевого радиуса, окружности  $\beta$  и  $\gamma$ , касающимися как окружности, описанной около четырехугольника  $ABCD$ , так и касающимися хорды  $AD$ . В этом случае справедливость соотношения (1) легко проверяется. Отсюда, в соответствии со сделанным замечанием, получаем его справедливость во всех случаях (тем самым одновременно доказана и обычная теорема Птолемея).

**240.** При доказательстве нашего утверждения будем пользоваться приемом, называемым «расширением» окружностей. Суть этого приема в следующем. Пусть две окружности, например  $\alpha$  и  $\beta$ , касаются некоторой окружности  $\Sigma$  внешним образом. Рассмотрим окружности  $\alpha'$ ,

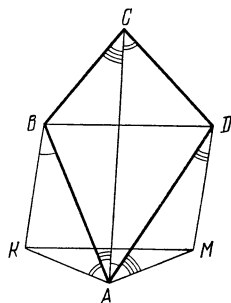


Рис. 43

$\beta'$  и  $\Sigma'$ , концентрические соответственно  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\Sigma$ . При этом, если радиус окружности  $\Sigma'$  больше радиуса окружности  $\Sigma$  на величину  $\chi$ , а радиусы окружностей  $\alpha'$  и  $\beta'$  меньше радиусов  $\alpha$  и  $\beta$  на ту же величину  $\chi$  ( $\chi$  — достаточно мало), то окружности  $\alpha'$  и  $\beta'$  будут касаться окружности  $\Sigma'$  внешним образом, а общая внешняя касательная к окружностям  $\alpha'$  и  $\beta'$  равна общей внешней касательной к окружностям  $\alpha$  и  $\beta$ . Также рассматривается случай, когда  $\alpha$  и  $\beta$  касаются  $\Sigma$  внутренним образом. Если же  $\alpha$  и  $\beta$  касаются  $\Sigma$  одна внешним, а другая внутренним образом, то при увеличении радиуса  $\Sigma$  радиус первой уменьшается, второй — увеличивается, общая внутренняя касательная к окружностям  $\alpha'$  и  $\beta'$  при этом не меняется.

Рассмотрим для определенности случай, когда в равенстве (\*) (см. условие задачи) фигурируют лишь отрезки общих внешних касательных. (Заметим, что ни одна из окружностей не может находиться внутри другой.) Докажем, что окружности  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  касаются некоторой окружности  $\Sigma$  одинаковым — или все внешним или все внутренним — образом. Пусть радиусы окружностей  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  не все равны между собой (случай равных радиусов легко рассматривается отдельно), и, для определенности,  $r_\alpha$  — радиус окружности  $\alpha$  — наименьший. Рассмотрим окружности  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ ,  $\delta'$ , где  $\alpha'$  — окружность нулевого радиуса — точка, совпадающая с центром окружности  $\alpha$ , а  $\beta'$ ,  $\gamma'$ ,  $\delta'$  — окружности, концентрические окружностям  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  с радиусами, уменьшенными на величину  $r_\alpha$ . Для дальнейших рассуждений воспользуемся следующим утверждением: если  $\beta'$ ,  $\gamma'$ ,  $\delta'$  — три окружности, ни одна из которых не расположена внутри другой и хотя бы одна из них не нулевого радиуса, то существует в точности две окружности  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , каждая из которых касается окружностей  $\beta'$ ,  $\gamma'$  и  $\delta'$  одинаковым образом (Т).

К этому утверждению вернемся в конце решения.

Возьмем на окружностях  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  точки  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  так, что  $\frac{t_{\alpha_1\beta'}}{t_{\alpha_1\delta'}} = \frac{t_{\alpha_2\beta'}}{t_{\alpha_2\delta'}} = \frac{t_{\alpha'\beta'}}{t_{\alpha'\delta'}} = \lambda$ , причем  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  расположены на дугах, не содержащих точки касания окружности  $\gamma'$ . Для трех четверок окружностей  $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ ,  $(\alpha_1, \beta', \gamma', \delta')$ ,  $(\alpha_2, \beta', \gamma', \delta')$  выполняется соотношение (\*); для первой — это утверждение нашей задачи, для двух других — на основании утверждения задачи П.239. ( $\alpha'$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  — окружности нулевого радиуса.) Следовательно,  $\frac{t_{\alpha_1\beta'}}{t_{\alpha_2\gamma'}} = \frac{t_{\alpha_2\beta'}}{t_{\alpha_2\gamma'}} = \frac{t_{\alpha'\beta'}}{t_{\alpha'\gamma'}} = \mu$ .

Но геометрическое место точек  $M$ , для которых отношение касательных к двум фиксированным окружностям постоянно, есть окружность (см. задачу I.11). Значит,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha'$  принадлежат как геометрическому месту точек, для которых отношение касательных, проведенных к окружностям  $\beta'$  и  $\delta'$ , равно  $\lambda$ , так и геометрическому месту точек, для которых отношение касательных, проведенных к окружностям  $\beta'$  и  $\gamma'$ , равно  $\mu$ . А это означает, что  $\alpha'$  должно совпадать с  $\alpha_1$  или  $\alpha_2$ .

Пусть  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  совпадают. Докажем, что в этом случае окружности, определяемые параметрами  $\lambda$  и  $\mu$ , касаются. Возьмем  $\tilde{\lambda} \neq \lambda$ , но достаточно близко к  $\lambda$ ,  $\tilde{\lambda}$  определит на  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  две точки  $\tilde{\alpha}_1$  и  $\tilde{\alpha}_2$ , для

которых  $\frac{t_{\tilde{\alpha}_1\beta'}}{t_{\tilde{\alpha}_1\delta'}} = \frac{t_{\tilde{\alpha}_2\beta'}}{t_{\tilde{\alpha}_2\delta'}} = \tilde{\lambda}$ . Найдем:  $\tilde{\mu} = \frac{t_{\tilde{\alpha}_1\beta'}}{t_{\tilde{\alpha}_1\gamma'}} = \frac{t_{\tilde{\alpha}_2\beta'}}{t_{\tilde{\alpha}_2\gamma'}}$ . Значит, окружности, соответствующие параметрам  $\tilde{\lambda}$  и  $\tilde{\mu}$ , имеют общую хорду  $\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2$ . Если  $\tilde{\lambda} \rightarrow \lambda$ , то  $\tilde{\mu} \rightarrow \mu$ ,  $|\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2| \rightarrow 0$ , т. е. окружности, соответствующие параметрам  $\lambda$  и  $\mu$ , касаются в точке  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Таким образом,  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  и  $\delta'$  касаются или  $\Sigma_1$  или  $\Sigma_2$ . «Расширяя» соответственно  $\Sigma_1$  или  $\Sigma_2$  на величину  $\pm r_\alpha$ , получим, что  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  касаются некоторой окружности или прямой ( $\Sigma_1$  или  $\Sigma_2$  могут являться прямой) или имеют общую точку.

Если в равенстве (\*) некоторые из отрезков являются отрезками общих внутренних касательных, то нужно доказывать существование окружности  $\Sigma$ , касающейся  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  и такой, что те из окружностей  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ , для которых в равенстве (\*) фигурирует общая внутренняя касательная, касающаяся  $\Sigma$  различным образом. Соответственным образом должно измениться утверждение (Т).

Вернемся к утверждению (Т). Делая «расширение», можно свести его к случаю, когда одна из окружностей  $\beta'$ ,  $\gamma'$ ,  $\delta'$  имеет нулевой радиус — является точкой. Читатель, знающий, что такое «инверсия», легко докажет, что утверждение (Т) теперь оказывается эквивалентным утверждению, что любые две окружности, не расположенные одна внутри другой, имеют в точности две общие внешние касательные. (См. Приложение. Более подробно об инверсии, а также о задачах П.239, П.240 можно прочесть в книге: Яглом И. М. Геометрические преобразования. — М.: Физматгиз, 1956, гл. II, задачи 261, 273.) **З а м е ч а н и е.** Если три из четырех данных окружностей  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  имеют нулевой радиус — являются точками, доказательство можно существенно упростить. Сделайте это самостоятельно. В дальнейшем (см. задачу П.287) нам потребуется именно этот частный случай.

**241.** Покажите, что каждое из этих условий является необходимым и достаточным для того, чтобы существовала окружность, вписанная в четырехугольник  $ABCD$  (см. также задачу I.19).

**242.** Покажите, что каждое из этих условий является необходимым и достаточным для того, чтобы существовала окружность, касающаяся прямых  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$ , центр которой находится вне четырехугольника  $ABCD$ .

**243.** Пусть  $ABCD$  — описанный четырехугольник,  $O$  — центр вписанной окружности,  $M_1$  — середина  $AC$ ,  $M_2$  — середина  $BD$ ,  $r$  — радиус окружности (расстояния от  $O$  до сторон равны  $r$ ),  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ ,  $u_1$  — соответственно расстояния от  $M_1$  до  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ ;  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $z_2$ ,  $u_2$  — соответственно расстояния от  $M_2$  до тех же сторон. Поскольку  $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$ , то  $|AB|r - |BC|r + |CD|r - |DA|r = 0$ . Кроме того,  $|AB|x_1 - |BC|y_1 + |CD|z_1 - |DA|u_1 = 0$ ,  $|AB|x_2 - |BC|y_2 + |CD|z_2 - |DA|u_2 = 0$ , а это и означает, что точки  $O$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  лежат на одной прямой (см. замечание к задаче П.22). Точно так же разбираются другие случаи расположения точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  и центра окружности. При этом нужно использовать соотношения, возникающие между отрезками  $|AB|$ ,  $|BC|$ ,  $|CD|$ ,  $|DA|$  (см. задачи П.241, П.242), и, как сказано в замечании к задаче П.22, если какие-то две точки окажутся расположенными по разные стороны от какой-либо прямой, то соответствующим расстояниям нужно приписывать разные знаки.



**244.** Обозначим через  $L$  и  $P$  соответственно точки пересечения прямых  $AM$  и  $AN$  с окружностью. Как следует из задачи П.204, прямые  $BL$ ,  $DP$  и  $MN$  пересекаются в одной точке. Но  $BL$  и  $DP$  — диаметры — пересекаются в центре окружности, следовательно,  $MN$  проходит через центр окружности.

**245.** Воспользуемся теоремой Паскаля (задача П.204).

**246.** Пусть (рис. 44)  $P$  — точка пересечения диагоналей, а  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  — основания перпендикуляров, опущенных из  $P$  на  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  соответственно. Так как четырехугольник  $PKBL$  — вписанный, то  $\angle PKL = \angle PBC$ , аналогично  $\angle PKN = \angle PAD$ ; но  $\angle PBC = \angle PAD$ , так как они опираются на одну дугу. Следовательно,  $KP$  — биссектриса угла  $NKL$ ; значит, биссектрисы углов четырехугольника  $KLMN$  пересекаются в точке  $P$ , которая и является центром вписанной в четырехугольник  $KLMN$  окружности. Пусть теперь диагонали  $AC$  и  $BD$  перпендикулярны,  $R$  — радиус данной окружности,  $d$  — расстояние от  $P$  до ее центра,  $|AP| \cdot |PC| = R^2 - d^2$ .

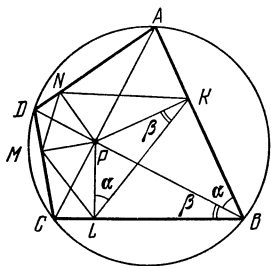


Рис. 44

Радиус искомой окружности  $r$  равен, в частности, расстоянию от  $P$  до  $KL$ . Обозначив  $\angle KLP = \angle ABP = \alpha$ ,  $\angle PBC = \beta$ , найдем:  $r = |PL| \sin \alpha = |PB| \sin \beta \sin \alpha = |PB| \frac{|PC|}{|BC|} \cdot \frac{|AP|}{|AB|} = (R^2 - d^2) \frac{|PB| \cdot |AC|}{|BC| \cdot |AB| \sin(\alpha + \beta)} \times \frac{\sin(\alpha + \beta)}{|AC|} = (R^2 - d^2) \frac{2S_{ABC}}{2S_{ABC}} \cdot \frac{1}{2R} = \frac{R^2 - d^2}{2R}$ . Ответ:  $\frac{R^2 - d^2}{2R}$ .

**247.** Пусть (рис. 45)  $ABCD$  — данный четырехугольник,  $P$  — точка пересечения диагоналей,  $K$  — середина  $BC$ ,  $L$  — середина  $AD$ . Докажем, что прямая  $LP$  перпендикулярна  $BC$ . Обозначив через  $M$  точку пересечения  $LP$  с  $BC$ , будем иметь:  $\angle BPM = \angle LPD = \angle ADP = \angle PCB$ . Следовательно,  $PM \perp BC$ . Значит,  $OK \parallel LP$ . Аналогично  $PK \parallel LO$ , и  $KOLP$  — параллелограмм,  $|LK|^2 + |PO|^2 = 2(|LP|^2 + |PK|^2) = 2\left(\frac{|AD|^2}{4} + \frac{|BC|^2}{4}\right) = 2R^2$ . (Если

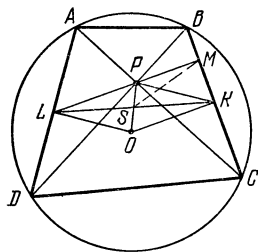


Рис. 45

хорды  $AD$  и  $BC$  переместить так, чтобы они имели общий конец, а соответствующие дуги продолжали одна другую, то образуется прямоугольный треугольник с катетами  $|AD|$  и  $|BC|$  и диаметром  $2R$ , значит,  $|AD|^2 + |BC|^2 = 4R^2$ .) Следовательно,  $|LK|^2 = 2R^2 - d^2$  и точки  $L$  и  $K$  лежат на окружности с центром в  $S$  — середине  $PO$  и радиусом  $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - d^2}$ . Но  $\triangle LMK$  — прямоугольный,  $MS$  — медиана,  $|MS| = \frac{1}{2}|LK| = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - d^2}$ , т.е.  $M$  лежит на той же окружности.

Ответ:  $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - d^2}$ .

**248.** Из двух предыдущих задач следует, что если диагонали вписанного четырехугольника перпендикулярны, то проекции точки пересечения диагоналей этого четырехугольника на его стороны служат вершинами четырехугольника, который можно вписать в окружность и около которого можно описать окружность, причем радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между их центрами полностью определяются радиусом окружности, описанной около исходного четырехугольника, и расстоянием от ее центра до точки пересечения диагоналей вписанного в нее четырехугольника. Следовательно, при вращении диагоналей исходного четырехугольника вокруг точки их пересечения четырехугольник, образованный проекциями этой точки, будет вращаться, оставаясь вписанным в одну и ту же окружность и описанным около одной и той же окружности. Легко также показать, учитывая выражения для радиусов вписанной и описанной окружностей, полученные в двух предыдущих задачах, что предлагаемое к доказательству соотношение для таких четырехугольников выполняется.

Для завершения доказательства нам осталось доказать, что любой «вписано-описанный» четырехугольник может быть получен из вписанного четырехугольника со взаимно перпендикулярными диагоналями вышеуказанным способом. В самом деле, если  $KLMN$  — «вписано-описанный» четырехугольник,  $P$  — центр вписанной окружности, то, проведя прямые, перпендикулярные биссектрисам  $KP$ ,  $LP$ ,  $MP$ ,  $NP$  и проходящие через  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  соответственно, получим четырехугольник  $ABCD$  (см. рис. 44). При этом  $\angle BPK = \angle KLB = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle MKL$  (использовано, в частности, то, что у четырехугольника  $PKBL$  противоположные углы прямые и, следовательно, он вписанный). Аналогично  $\angle KPA = \angle KNA = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle MNK$  и, значит,

$\angle BPA = \angle BPK + \angle KPA = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle MKL + \angle MNK) = 90^\circ$ . Таким образом, все углы  $BPA$ ,  $APD$ ,  $DPC$  и  $CPB$  прямые,  $P$  — точка пересечения диагоналей четырехугольника  $ABCD$ , сами же диагонали перпендикулярны. Нетрудно показать, что  $ABCD$  — вписанный четырехугольник, поскольку

$$\begin{aligned} \angle ABC + \angle ADC &= \angle PBL + \angle PBK + \angle PDN + \angle PDM = \\ &= \angle PKL + \angle PLK + \angle PMN + \angle PNM = \frac{1}{2}(\angle NKL + \angle KLM + \\ &\quad + \angle LMN + \angle MNK) = 180^\circ. \end{aligned}$$

Примечание: см. также задачу II.319.

**249.** Середины сторон четырехугольника образуют параллелограмм, диагонали которого параллельны отрезкам, соединяющим центры тяжести противоположных треугольников. Другой параллелограмм образуют четыре высоты рассматриваемых треугольников, выходящие из вершин четырехугольника. Стороны первого параллелограмма параллельны диагоналям четырехугольника, а второго — им перпендикулярны. Кроме того, стороны второго параллелограмма

в  $\text{ctg } \alpha$  раз больше соответствующих сторон первого ( $\alpha$  — острый угол между диагоналями четырехугольника.)

**250.** Докажем, что оба утверждения ( $BD$  — биссектриса угла  $ANC$ ,  $AC$  — биссектриса угла  $BMD$ ) эквивалентны равенству  $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$ . Возьмем на дуге  $BAD$  точку  $A_1$  так, что  $|DA_1| = |AB|$ . Условие задачи эквивалентно тому, что прямая  $A_1C$  проходит через  $N$  — середину  $BD$ , т. е. равенству площадей треугольников  $DA_1C$  и  $A_1BC$ , откуда  $|DA_1| \cdot |DC| = |BA_1| \cdot |BC|$ , т. е.  $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$ .

**251.** Перпендикулярность биссектрис доказывается без труда. Докажем второе утверждение. Пусть  $M$  — середина  $AC$ ,  $N$  — середина  $BD$ . Из подобия треугольников  $AKC$  и  $BKD$  следует, что  $\angle MKA = \angle NKD$  и  $\frac{|MK|}{|KN|} = \frac{|AC|}{|BD|}$ , т. е. биссектриса угла  $BKC$  является также и биссектрисой угла  $MKN$  и делит отрезок  $MN$  в отношении  $\frac{|MK|}{|KN|} = \frac{|AC|}{|BD|}$ . Очевидно, что в этом же отношении делит  $MN$  и биссектриса угла  $ALB$ .

**252.** Пусть  $ABCD$  — данный четырехугольник,  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ ,  $O_1$  и  $O_2$  — центры окружностей, описанных около треугольников  $DAB$  и  $BCD$ ,  $K$  и  $L$  — соответственно середины сторон  $AB$  и  $BC$ . Точки  $O_1$  и  $O_2$  лежат на  $OK$  и  $OL$ , причем  $\frac{|OO_1|}{|O_1K|} = \frac{|OO_2|}{|O_2L|}$ . Это следует из того, что  $O_1O_2$  перпендикулярна  $DB$  и, следовательно,  $O_1O_2$  параллельна  $LK$  ( $LK$  параллельна  $AC$ ). Значит, прямые  $AO_1$  и  $CO_2$  делят  $OB$  в одном и том же отношении. (Применим теорему Менелая — задача II.45 — к треугольникам  $OKB$  и  $OLD$ .)

**253.** Обозначим радиус окружности через  $R$ , а расстояния от  $P$ ,  $Q$  и  $M$  до центра — соответственно через  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Тогда (задача I.272)  $|QP|^2 = a^2 + b^2 - 2R^2$ ,  $|QM|^2 = b^2 + c^2 - 2R^2$ ,  $|PM|^2 = c^2 + a^2 - 2R^2$ . Если  $O$  — центр окружности, то для того чтобы  $QO$  была перпендикулярна  $PM$ , необходимо и достаточно выполнение равенства (задача II.1)  $|QP|^2 - |QM|^2 = |OP|^2 - |OM|^2$ , или  $(a^2 + b^2 - 2R^2) - (b^2 + c^2 - 2R^2) = a^2 - c^2$ . Аналогично проверяется перпендикулярность других отрезков.

**254.** Если  $M$ ,  $N$ ,  $P$  и  $Q$  — соответственно точки касания сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  с окружностью, то, как следует из решения задачи I.236,  $MP$  и  $NQ$  пересекаются в точке пересечения  $AC$  и  $BD$ . Точно так же докажем, что прямые  $MN$  и  $PQ$  пересекаются в той же точке, что и прямые  $AC$  и  $KL$ , а прямые  $MQ$  и  $NP$  — в той же точке, что и прямые  $KL$  и  $BD$ . Теперь для четырехугольника  $MNPQ$  воспользуемся результатом предыдущей задачи.

**255.** Обозначим:  $\angle DAN = \angle MAB = \varphi$ . Пусть  $L$  — точка пересечения  $AM$  и  $NB$ ,  $P$  — точка пересечения  $AN$  и  $DM$ ,  $Q$  — точка пересечения  $AK$  и  $MN$ . По теореме Чевы (задача II.44) для  $\triangle AMN$  имеем:

$$\frac{|NQ|}{|QM|} = \frac{|AL|}{|LM|} \cdot \frac{|NP|}{|PA|} = \frac{S_{NAB}}{S_{NMB}} \cdot \frac{S_{DNM}}{S_{DAM}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} |AN| \cdot \frac{|AM|}{\cos \varphi} \sin \angle NAB \cdot \frac{1}{2} |AN| \cdot |NM| \operatorname{tg} \varphi \cos \angle ANM}{\frac{1}{2} |AM| \cdot |NM| \operatorname{tg} \varphi \cos \angle AMN \cdot \frac{1}{2} \frac{|AN|}{\cos \varphi} \cdot |AM| \sin \angle MAD} = \frac{|AN| \cos \angle ANM}{|AM| \cos \angle AMN},$$

т. е.  $Q$  делит  $NM$  в том же отношении, что и высота, опущенная из  $A$  на  $NM$ .

**257.** Докажите сначала следующее вспомогательное утверждение: если  $A, B$  и  $C$  – точки на одной прямой,  $M$  – произвольная точка плоскости, то центры окружностей, описанных около треугольников  $MAC$ ,  $MBC$ ,  $MCA$ , и точка  $M$  лежат на одной окружности. Затем используйте результат задачи П.256.

**258.** Обозначим точки пересечения прямых через  $A, B, C, D, P, Q$  (расположены точки так же, как в решении задачи 1.271);  $O$  – центр окружности, проходящей через  $A, B, C$  и  $D$ ,  $R$  – ее радиус,  $a$  и  $b$  – касательные, проведенные к окружности соответственно из  $P$  и  $Q$ . То, что  $M$  лежит на  $PQ$ , было доказано в процессе решения задачи 1.271. Кроме того, там же было доказано, что  $|PM| \cdot |PQ| = a^2$ ,  $|QM| \cdot |QP| = b^2$ ,  $|QP|^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Таким образом,  $|PM| = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $|QM| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ . Кроме того,  $|PO| = \sqrt{a^2 - R^2}$ ,  $|QO| = \sqrt{b^2 - R^2}$ . Сле-

довательно,  $|PO|^2 - |QO|^2 = a^2 - b^2 = |PM|^2 - |QM|^2$ . А это означает, что  $OM \perp PQ$ . Для завершения доказательства необходимо рассмотреть случай, когда (в тех же обозначениях) на окружности расположены точки  $A$ ,  $C$ ,  $P$  и  $Q$  (см. также задачу II.253 и ее решение).

**259.** Если перемещать одну прямую параллельно самой себе, то прямая Эйлера треугольника, одной из сторон которого является перемещаемая прямая, будет перемещаться параллельно самой себе.

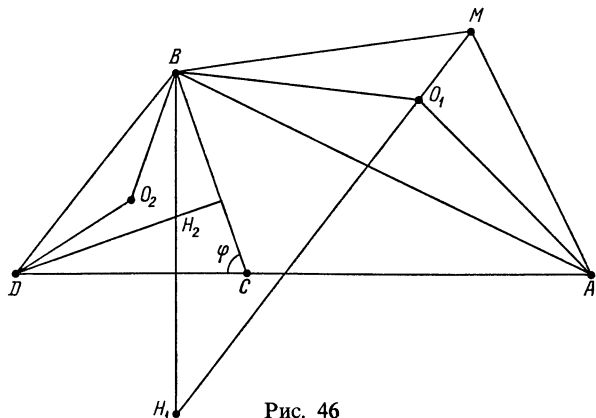


Рис. 46

Учитывая это, задачу легко свести к следующей. Пусть  $A$ ,  $C$  и  $D$  — три точки на одной прямой,  $B$  — произвольная точка плоскости. Если прямая Эйлера треугольника  $ABC$  параллельна  $BD$ , то прямая Эйлера треугольника  $CBD$  параллельна  $AB$  (рис. 46). Докажем это. Обозначим:  $\angle BCD = \varphi$  (считаем, что  $C$  между  $A$  и  $D$ ,  $\varphi \leq 90^\circ$ ),  $O_1$  и  $H_1$  — центр описанной окружности и точка пересечения высот  $\triangle ABC$ ,  $O_2$  и  $H_2$  — эти же точки в  $\triangle CBD$ . Опишем около  $ABH_1$  окружность,  $M$  — точка ее пересечения с  $O_1H_1$ . Докажем, что четырехугольники  $O_1AMB$  и  $O_2DH_2B$  подобны. Прежде всего, треугольники  $O_1AB$  и  $O_2DB$  — подобные равнобедренные треугольники, а  $\angle MAB = \angle MN_1B = \angle H_1BD = \angle H_2BD$  ( $BD$  параллельна  $O_1H_1$ ),  $\angle MBA = \angle MN_1A = \angle H_2DB$  ( $AH_1$  и  $DH_2$  перпендикулярны  $CB$ ). Подобие четырехугольников доказано. Далее:  $\angle O_2H_2B = \angle O_1MA = \angle H_1MA = \angle H_1BA = \angle H_2BA$ , т. е.  $H_2O_2$  параллельна  $AB$ .

**260.** Из результата задачи II.19 следует, что общая хорда окружностей с диаметрами  $AE$  и  $DC$  (а также  $DC$  и  $BF$ ,  $BF$  и  $AE$ ) содержит точки пересечения высот треугольников  $ABC$ ,  $BDE$ ,  $DAF$  и  $CEF$ . Пусть далее  $K$  — точка пересечения  $AE$  и  $DC$ ,  $L$  — точка пересечения  $AE$  и  $BF$ . По теореме Менелая (задача II.45) для треугольников  $BEA$  и  $EAC$  имеем:  $\frac{|AK|}{|KE|} \cdot \frac{|EC|}{|CB|} \cdot \frac{|BD|}{|DA|} = 1$ ,  $\frac{|AL|}{|LE|} \cdot \frac{|EB|}{|BC|} \cdot \frac{|CF|}{|FA|} = 1$ . Разделив эти равенства почленно одно на другое и учитывая, что  $\frac{|CE|}{|EB|} \cdot \frac{|BD|}{|DA|} \cdot \frac{|AF|}{|FC|} = 1$ , получим:  $\frac{|AK|}{|AL|} = \frac{|KE|}{|LE|}$ . Рассмотрим окружность с диаметром  $AE$ . Для всех точек  $P$  этой окружности отношение  $\frac{|PK|}{|PL|}$  — постоянно (см. задачу II.9). То же верно и для окружностей с диаметрами  $DC$  и  $BF$ . Таким образом, три этих окружности пересекаются в двух точках  $P_1$  и  $P_2$  таких, что отношения расстояний от  $P_1$  и  $P_2$  до  $K$ ,  $L$  и  $M$  для них одинаковы. Теперь можно воспользоваться результатом задачи II.14.

**261.** Утверждение следует из результата предыдущей задачи.

**262.** Обозначим через  $l(ABC)$  срединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точку пересечения высот и центр описанной окружности треугольника  $ABC$ . Пусть прямая пересекает стороны  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  соответственно в точках  $D$ ,  $E$  и  $F$ . Докажем сначала, что при перемещении прямой  $DEF$  параллельно самой себе точка  $M$  пересечения прямых  $l(DFB)$  и  $l(DEC)$  описывает прямую линию. Пусть точки  $D_1, E_1, F_1; D_2, E_2, F_2; D_3, E_3, F_3$  соответствуют трем положениям этой прямой. Прямые  $l(D_iF_iB)$  и  $l(D_iE_iC)$ , где  $i = 1, 2, 3$ , пересекаются между собой в  $M_i$  и пересекают прямую  $BC$  в точках  $N_i$  и  $K_i$ . Легко видеть, что точка  $N_2$  делит отрезок  $N_1N_3$  в том же отношении, что и точка  $K_2$  делит отрезок  $K_1K_3$ . Это отношение равно отношению, в котором  $D_2$  делит  $D_1D_3$  (в том же отношении  $E_2$  делит  $E_1E_3$ , а  $F_2 - F_1F_3$ ). Поскольку прямые  $l(D_iF_iB)$  параллельны между собой и прямые  $l(D_iE_iC)$  также параллельны между собой, то прямая  $l(D_2F_2B)$  делит отрезок  $M_1M_3$  в том же отношении, что и прямая  $l(D_2E_2C)$ , т. е.  $M_2$  лежит на отрезке  $M_1M_3$ .

Покажем теперь, что точка  $M$  описывает прямую  $l(ABC)$ . Для этого достаточно доказать, что для двух положений прямой  $DEF$  соответствующая точка  $M$  лежит на  $l(ABC)$ . Рассмотрим случай, когда эта прямая проходит через  $A$  (точки  $E$  и  $F$  совпадают с  $A$ ). Введем систему координат, в которой точки  $A, B, C$  и  $D$  имеют координаты  $A(0, a)$ ,  $B(b, 0)$ ,  $C(c, 0)$ ,  $D(d, 0)$ . Найдем уравнение прямой  $l(ABC)$ . Точка пересечения высот треугольника  $ABC$  имеет координаты  $\left(0, -\frac{bc}{a}\right)$ , центр описанного круга  $-\left(\frac{b+c}{2}, \frac{1}{2}\left(a + \frac{bc}{a}\right)\right)$ . Запишем уравнение прямой  $l(ABC)$ :

$$x(b+c) + y\left(a + \frac{3bc}{a}\right) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + bc - \frac{3b^2c^2}{4a^2}.$$

Заменяя в этом уравнении  $c$  на  $d$ , получим уравнение прямой  $l(ABD)$ , а заменяя  $b$  на  $d$  — уравнение прямой  $l(ACD)$ .

Можно проверить, что все три прямые имеют общую точку  $Q(x_0, y_0)$ , где  $x_0 = \frac{1}{4}(b+c+d) - \frac{3bcd}{4a^2}$ ,  $y_0 = \frac{1}{4a}(a^2 - bc - cd - db)$ . Этим доказательство завершается, поскольку случай, когда прямая  $DEF$  проходит через  $B$  или  $C$ , равнозначен рассмотренному.

**263.** Пусть  $l, m, n$  и  $p$  — прямые, образующие наши треугольники (рис. 47, а). Введем следующие обозначения:  $P$  — центр окружности, вписанной в треугольник, образованный прямыми  $l, m$  и  $n$ ,  $P_1$  — центр вневписанной окружности того же треугольника, которая касается стороны, лежащей на прямой  $l$ . Такой же смысл будут иметь обозначения  $L, M_p, N_m$  и т. д.

$L$	$N$	$M_l$	$P_n$	$O_1$
$M$	$P$	$L_m$	$N_p$	$O_2$
$P_m$	$M_p$	$N_m$	$L_p$	$O_3$
$N_l$	$L_n$	$P_l$	$M_n$	$O_4$
$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	

В приведенной таблице четыре точки, расположенные в одной строке или одном столбце лежат на одной окружности, причем центры окружностей, соответствующие строкам, лежат на одной прямой  $-q_1$ , а центры, соответствующие столбцам, на другой  $-q_2$ ;  $q_1$  и  $q_2$  перпендикулярны и пересекаются в точке Микеля (задача II.256). Докажем это. То, что указанные четверки лежат на одной окружности, доказывается несложно. Обозначим через  $O_i, Q_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) центры соответствующих окружностей. Докажем, что  $O_1O_2$  перпендикулярна  $Q_1Q_3$  и  $Q_2Q_4$ . Если в треугольнике  $(l, n, m)$  угол между  $l$  и  $m$  равен  $\alpha$ , то  $\angle LNM_l = \angle L_mPM = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ ; следовательно,  $\angle LO_1M_l = \angle L_mO_2M = 180^\circ - \alpha$ . Точно так же  $\angle LP_mM = \angle L_mP_lM_l = \alpha/2$ ,  $\angle LQ_1M =$



$= L_m Q_3 M_l = \alpha$ . Треугольники  $LO_1 M_l$ ,  $L_m O_2 M$ ,  $LQ_1 M$ ,  $L_m O_3 M_l$  — равнобедренные, их боковые стороны соответственно перпендикулярны (например,  $O_1 L$  и  $LQ_1$ ). Далее (рис. 47, 6),  $|Q_1 O_1|^2 - |O_1 Q_3|^2 = (a^2 + c^2) - (a^2 + d^2) = (b^2 + c^2) - (b^2 + d^2) = |O_2 Q_1|^2 - |O_2 Q_3|^2$ . Следовательно,  $O_1 O_2$  и  $Q_1 Q_3$  перпендикулярны. Точно так же докажем перпендикулярность  $O_1 O_2$  и  $Q_2 Q_4$  (рассмотрим прямую, на которой расположены точки  $N, P, N_p, P_n$ ). Поэтому  $Q_1 Q_3$  и  $Q_2 Q_4$  параллельны (если эти точки не лежат на одной прямой). Точно так же параллельными будут  $Q_1 Q_4$  и  $Q_3 Q_2$  (они перпендикулярны  $O_1 O_3$ ),  $Q_1 Q_2$  и  $Q_3 Q_4$  (они перпендикулярны  $O_1 O_4$ ), а из этого следует, что  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  лежат на одной прямой —  $q_2$ ; также и  $O_1, O_2, O_3, O_4$  лежат на одной прямой —  $q_1$ . Очевидно,  $q_1$  и  $q_2$  перпендикулярны.

Будем перемещать прямую  $m$  параллельно самой себе. Пусть  $L', L'_m, O'_1, O'_2$  соответствуют прямой  $m'$ . Отношение  $\frac{|O_1 O'_1|}{|O_2 O'_2|} = \frac{|LL'|}{|L_m L'_m|}$  постоянно (оно равно  $\frac{|AL|}{|AL'_m|}$ ), а это означает, что при перемещении

$m$  прямая  $O_1 O_2$ , т. е.  $q_1$ , проходит через фиксированную точку. Точно так же через фиксированную точку проходит прямая  $q_2$ . Поскольку  $q_1$  и  $q_2$  перпендикулярны, то их точка пересечения описывает окружность. Но когда  $m$  проходит через  $A$  (а также  $B$  или  $C$ ), то точки  $L$  и  $L_m$  сливаются с  $A$ , прямые  $O_1 O_2$  и  $Q_1 Q_3$ , т. е.  $q_1$  и  $q_2$  проходят через  $A$  (соответственно  $B$  или  $C$ ). Таким образом, точка пересечения  $q_1$  и  $q_2$  пробегает описанную около треугольника  $ABC$  окружность. Перемещая другие прямые —  $l, n, p$  — докажем, что точка пересечения  $q_1$  и  $q_2$  принадлежит любой окружности, описанной около одного из треугольников, образованных прямыми  $l, m, n, p$ , т. е. прямые  $q_1$  и  $q_2$  пересекаются в точке пересечения окружностей, описанных около этих треугольников — точке Микеля.

Заметим, что «попутно» доказано, что четыре окружности, описанные около четырех треугольников, образованных четырьмя прямыми плоскости, пересекаются в одной точке (задача II.256).

**266.** Обозначим одну из точек пересечения, через которую проходит прямая, через  $C$ . Пусть  $B_1, B_2, B_3$  — основания перпендикуляров, опущенных соответственно из  $O_1, O_2, O_3$  на прямую, а  $K$  и  $M$  — точки пересечения прямых, параллельных  $A_1 A_2$ , проходящих через  $O_1$  и  $O_2$  соответственно с  $O_2 B_2$  и  $O_3 B_3$ . Поскольку  $B_1$  и  $B_2$  — середины хорд  $A_1 C$  и  $C A_2$ , то  $|B_1 B_2| = |A_1 A_2|/2$ . Если  $\alpha$  — угол между прямыми  $A_1 A_3$  и  $O_1 O_3$ , то  $\frac{|A_1 A_2|}{|O_1 O_2|} = \frac{2|B_1 B_2|}{|O_1 O_2|} = 2 \frac{|O_1 K|}{|O_1 O_2|} = 2 \cos \alpha$ ; аналогично

$$\frac{|A_2 A_3|}{|O_2 O_3|} = 2 \cos \alpha.$$

**268.** Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры окружностей,  $R_1$  и  $R_2$  — их радиусы,  $|O_1 O_2| = a$ ,  $M$  — точка пересечения общих внутренних касательных. Окружность с диаметром  $O_1 O_2$  проходит через точки пересечения общих внешних касательных с общими внутренними касательными. При гомотетии с центром в точке  $M$  и коэффициентом  $\frac{a - R_1 - R_2}{a}$  эта



окружность перейдет в окружность, касающуюся данных внешним образом, с центром на  $O_1O_2$ .

**269.** Пусть  $M$  — одна из точек пересечения окружностей; тогда  $MA$  и  $MC$  — биссектрисы (внешнего и внутреннего) угла  $M$  треугольника  $BMD$ , поскольку окружность с диаметром  $AC$  — геометрическое место точек  $M$ , для которых  $\frac{|MA|}{|MC|} = \frac{|MB|}{|MD|}$  (см. задачу II.9). Пользуясь соотношениями между углами прямоугольного  $\triangle AMC$  и  $\triangle BMD$ , убедитесь, что радиусы описанных окружностей этих треугольников, проведенные из вершины  $M$ , взаимно перпендикулярны.

**271.** Заметим (рис. 48, а), что  $\triangle APM$  подобен  $\triangle AMQ$ ,  $\triangle APL$  подобен  $\triangle AKQ$ ,  $\triangle AKN$  подобен  $\triangle ALN$ ; из этих подобий получаем:

$\frac{|PM|}{|MQ|} = \frac{|AM|}{|AQ|}$ ,  $\frac{|QK|}{|PL|} = \frac{|AQ|}{|AL|}$ ,  $\frac{|LN|}{|NK|} = \frac{|AL|}{|AN|}$ . Перемножая эти равенства и учитывая, что  $|AM| = |AN|$ , получим, что  $\frac{|PM|}{|MQ|} \cdot \frac{|QK|}{|PL|} \cdot \frac{|LN|}{|NK|} = 1$ , а это (см. задачу II.49) и есть необходимое и достаточное условие того, чтобы прямые  $MN$ ,  $PK$  и  $QL$  пересекались в одной точке.

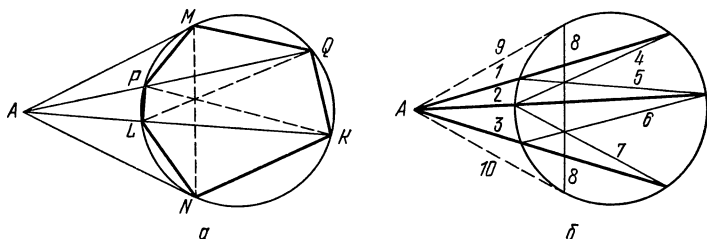


Рис. 48

Способ построения касательной с помощью одной линейки понятен из рис. 48, б. Числа 1, 2, ... показывают последовательность проведения прямых.

**272.** Искомое множество есть прямая — полярная точка относительно данной окружности (см. задачу II.21).

**273.** Углы  $AMN$  и  $BMN$  можно выразить через центральный угол, соответствующий дуге  $AB$  данной окружности (необходимо разобрать различные случаи расположения точки  $N$ ); после этого можно определить  $\angle AMB$ . Искомое геометрическое место точек есть окружность.

**274.** Воспользуйтесь результатами задач II.271 и II.21. Полученное геометрическое место точек совпадает с геометрическим местом точек задачи II.21, т. е. это есть полярная точка  $A$  относительно данной окружности.

**275.** Обозначим (рис. 49) через  $O$  точку пересечения  $AM$  и  $DC$ . Проведем через точку  $B$  касательную ко второй окружности и обозначим точку пересечения ее с  $AC$  через  $K$  (как и в условии). Очевидно, что утверждение задачи эквивалентно утверждению, что  $KO \parallel CM$ . Пусть угол, опирающийся на дугу  $AB$  в первой окружности равен  $\alpha$ , во

второй —  $\beta$ , тогда  $\angle BCM = \angle BAC$ ,  $\angle BDM = \angle BAD$ ,  $\angle DMC = 180^\circ - \angle BDM - \angle BCM = 180^\circ - \angle BAD - \angle BAC = 180^\circ - \angle DAC$ ; следовательно,  $ADMC$  — вписанный четырехугольник,  $\angle AMC = \beta$ . Далее, если касательная  $BK$  пересекает  $DM$  в точке  $L$ , то  $\angle KBO = \angle LBD = \angle BDL = \angle CAM$ ; значит, четырехугольник  $KABO$  также

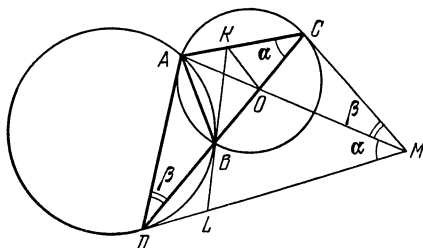


Рис. 49

вписанный и  $\angle KOA = \angle KBA = \beta$ , т. е.  $KO \parallel CM$  (точно так же рассматриваются случаи других взаимных расположений точек  $D$ ,  $B$  и  $C$ ).

**276.** Поскольку окружность с диаметром  $CD$  проходит через фиксированную точку  $A$  на  $MN$  ( $MN \perp CD$ ), то

$$|CN| \cdot |ND| = |NA|^2 \quad (1)$$

есть величина постоянная. Обозначим через  $K$  точку пересечения  $PQ$

с  $MN$ . Покажем, что  $\frac{|MK|}{|KN|}$  — величина постоянная. Заметим, что

$$\begin{aligned} \angle PNQ &= 180^\circ - \angle PMQ; \quad \text{значит,} \quad \frac{|MK|}{|KN|} = \frac{S_{PMQ}}{S_{PQN}} = \frac{|PM| \cdot |MQ|}{|PN| \cdot |NQ|} = \\ &= \frac{|MN|}{|CN|} \cdot \frac{|MN|}{|ND|} = \frac{|MN|^2}{|AN|^2} \quad (\text{использовано равенство (1) и то, что} \end{aligned}$$

$\triangle MNP$  подобен  $\triangle MNC$ , а  $\triangle MNQ$  подобен  $\triangle MND$ ).

**277.** Равенство  $\angle O_1AO_2 = \angle MAN$  следует из результата задачи I.279, равенство  $\angle O_1AO_2 = 2\angle CAE$  было доказано в процессе решения задачи I.275.

**278.** Пусть  $O$  и  $O_1$  — центры двух рассматриваемых окружностей ( $O$  — середина  $AB$ ),  $K$  — точка касания окружностей ( $K$  на прямой  $OO_1$ ),  $N$  — точка касания окружности  $O_1$  с прямой  $CD$ ,  $M$  — точка пересечения  $AB$  и  $CD$ . Поскольку  $O_1N$  параллельна  $AB$  и треугольники  $KO_1N$  и  $KOA$  подобные равнобедренные, то точки  $K$ ,  $N$  и  $A$  лежат на одной прямой. Обозначим через  $t$  касательную к окружности  $O_1$  из точки  $A$  (считаем, что окружность  $O_1$  внутри сегмента  $CBD$ ). Имеем:  $t^2 = |AN| \cdot |AK| = |AN|^2 + |AN| \cdot |NK| = |AM|^2 + |MN|^2 + |CN| \cdot |ND| = |AM|^2 + |MN|^2 + (|CM| - |MN|)(|CM| + |MN|) = |AM|^2 + |CM|^2 = |AK|^2$ , что и требовалось.

**279.** Пусть  $A$  — середина дуги данной окружности, не входящей в сегмент, касательные к окружностям, вписанным в сегмент, из  $A$  равны (задача II.278). Из этого следует, что  $A$  лежит на прямой  $MN$ , поскольку  $|AO_1|^2 - |AO_2|^2 = |O_1M|^2 - |O_2M|^2$ , где  $O_1$  и  $O_2$  — центры окружностей.





В первом случае рассмотрим окружность, касающуюся сторон угла в точках  $M$  и  $N$  и описанной около  $\triangle ABC$  окружности внутренним образом. Пусть  $a, b, c$  — стороны треугольника  $ABC$ ,  $r$  — радиус данной окружности,  $\angle A = \alpha$ ,  $|AM| = |AN| = x$ . Воспользуемся обобщенной теоремой Птолемея (задача II.239):  $xa = (b-x)c + (c-x)b$ ,

$$\text{откуда } x = \frac{2bc}{a+b+c} = \frac{4S_{ABC}}{(a+b+c)\sin\alpha} = \frac{2r}{\sin\alpha}, \text{ т. е. } x \text{ постоянно.}$$

(Можно доказать, что  $MN$  проходит через центр данной окружности.)

Во втором случае нужно взять окружность, касающуюся сторон угла и описанной около  $\triangle ABC$  окружности внешним образом.

**284.** Обозначим стороны  $\triangle ABC$  как обычно:  $a, b, c$ ; пусть  $|BD| = d, |AD| = b_1, |AM| = x$ . Воспользуемся обобщенной теоремой Птолемея (задача II.239):  $xa + (d - b_1 + x)b = (b - x)c$ , откуда

$$x = \frac{b(c + b_1 - d)}{a + b + c}. \quad (1)$$

Возьмем на  $AB$  точку  $N$  так, что  $MN$  параллельна  $BD$ . Имеем:

$$\begin{aligned} |MN| &= \frac{x}{b_1} d, \quad |AN| = \frac{x}{b_1} c, \\ S_{AMN} &= \left(\frac{x}{b_1}\right)^2 S_{ABD} = \left(\frac{x}{b_1}\right)^2 \frac{b_1}{b} S_{ABC} = \frac{x^2}{b_1 b} S_{ABC}. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть  $r$  — радиус окружности, касающейся  $MN$ , а также продолжений  $AN$  и  $AM$ . Тогда из (1) и (2) следует, что

$$r = \frac{2S_{AMN}}{|AM| + |AN| - |MN|} = \frac{2x^2 S_{ABC}}{bx(b_1 + c - d)} = \frac{2S_{ABC}}{a + b + c},$$

т. е.  $r$  равняется радиусу окружности, вписанной в  $\triangle ABC$ , что и требовалось.

**285.** Обозначим через  $M$  и  $K$  точки касания окружностей с центрами  $O_1$  и  $O_2$  с  $AC$ . Из результата предыдущей задачи следует,

$$\text{что } \angle O_1DM = \angle OKD = \frac{\varphi}{2},$$

$$\angle O_2DK = \angle OMD = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}.$$

Продолжим  $OK$  и  $OM$  до пересечения с  $O_1M$  и  $O_2K$  соответственно в точках  $L$  и  $P$  (рис. 53). В трапеции  $LMKP$  с основаниями  $LM$  и  $PK$  имеем  $\frac{|MO_1|}{|O_1L|} = \frac{|MD|}{|DK|} = \frac{|PO_2|}{|O_2K|}$ . Следовательно,

$O_1O_2$  проходит через точку пересечения диагоналей тра-

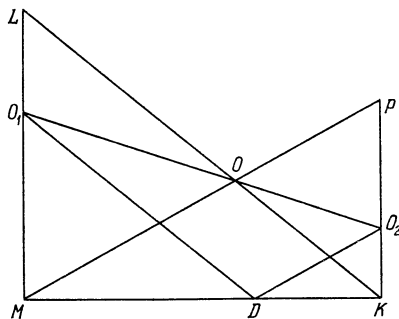


Рис. 53

пеции — точку  $O$ . Кроме того,

$$\frac{|O_1O|}{|OO_2|} = \frac{|LM|}{|PK|} = \frac{|MK| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{|MK| \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}.$$

**286.** Утверждение задачи следует из результатов задач II.285 и II.232.

**287.** Утверждение этой задачи можно доказать с помощью результата задачи II.240, точнее ее частного случая, когда три окружности имеют нулевой радиус — являются точками. Этими точками в данном случае будут середины сторон треугольника.

**288.** Утверждение этой задачи следует из теоремы Фейербаха (см. задачу II.287) и из того, что треугольники  $ABC$ ,  $AHB$ ,  $BHC$ ,  $CHA$  имеют одну и ту же окружность девяти точек (докажите).

**289.** Пусть в  $\triangle ABC$  для определенности,  $a \leq b \leq c$ . Обозначим через  $A_1, B_1, C_1$  середины сторон  $BC, CA, AB$ , а через  $F, F_a, F_b, F_c$  — точки касания вписанной и внеписанных окружностей с окружностью девяти точек  $\triangle ABC$ . Нужно доказать, что в шестиугольнике  $C_1F_cFA_1F_aF_b$  (точки, взятые в указанном порядке, образуют шестиугольник, так как  $a \leq b \leq c$ ) диагонали  $C_1A_1, F_cF_a$  и  $FF_a$  пересекаются в одной точке, для этого достаточно доказать (см. задачу II.49), что

$$|C_1F_c| \cdot |FA_1| \cdot |F_aF_b| = |F_cF| \cdot |A_1F_a| \cdot |F_bC_1|. \quad (1)$$

Используя формулы, полученные в задаче I.201, найдем:

$$\begin{aligned} |C_1F_c| &= \frac{b-a}{2} \sqrt{\frac{R}{R+2r_c}}, & |FA_1| &= \frac{c-b}{2} \sqrt{\frac{R}{R-2r}}, \\ |F_aF_b| &= \frac{(a+b)R}{\sqrt{R+2r_a} \cdot \sqrt{R+2r_b}}, & |F_cF| &= \frac{(b-a)R}{\sqrt{R-2r} \cdot \sqrt{R+2r_c}}, \\ |A_1F_a| &= \frac{c-b}{2} \sqrt{\frac{R}{R+2r_a}}, & |F_bC_1| &= \frac{a+b}{2} \sqrt{\frac{R}{R+2r_b}}. \end{aligned}$$

После этого равенство (1) легко проверяется. **Замечание.** Можно доказать, что точки пересечения противоположных сторон четырехугольника, вершинами которого являются точки касания вписанной и внеписанных окружностей данного треугольника с его окружностью девяти точек, лежат на продолжениях средних линий этого треугольника.

**290.** Используя формулы задач II.193, II.194, II.289 (в последней задаче см. ее решение), найдем  $\frac{|F_bF_c|}{|B_1C_1|} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)R^3}{abc \cdot |OI_a| \cdot |OI_b| \cdot |OI_c|}$ . Таки-

ми же будут отношения других соответствующих сторон треугольников  $F_aF_bF_c$  и  $A_1B_1C_1$ . Точно так же доказываются подобия других пар треугольников. При этом следует для величин  $|A_1B_2|$  и др. получить формулы, аналогичные формуле задачи II.194.

**291.** Докажите, что  $\triangle ABP = \triangle ACQ$ . Для этого достаточно доказать, что  $\triangle KBP = \triangle ABC$  и  $\triangle FCQ = \triangle ABC$  (по двум сторонам и углу между ними):  $\angle QAP = \angle CAB + \angle CAQ + \angle BAP = \angle CAB + \angle CAQ + \angle CQA = \angle CAB + 180^\circ - \angle QCA = \angle CAB + 90^\circ - \angle QCF = 90^\circ$

(предполагалось, что  $\angle CAB \leq 90^\circ$ ; рассуждения в случае  $\angle CAB > 90^\circ$  аналогичны).

**292.** Поскольку  $\angle FE_1E = \angle FCE = 90^\circ$ , то четырехугольник  $FE_1EC$  — вписанный,  $\angle FCE_1 = \angle FEE_1 = 60^\circ$ . Аналогично, вписанным является четырехугольник  $FE_1AD$  и  $\angle E_1DF = \angle E_1AF = 60^\circ$ , т. е.  $\triangle DE_1C$  — правильный. Точно так же доказывается, что правильным является  $\triangle BF_1C$ .

**293.** Обозначим через  $P, Q$  и  $R$  точки пересечения соответственно  $LB$  и  $AC$ ,  $AN$  и  $BC$ ,  $LB$  и  $AN$ . Пусть  $|BC| = a, |AC| = b$ . Достаточно показать, что  $S_{ACQ} = S_{APB}$  (обе эти площади отличаются от рассматриваемых добавлением площади  $\triangle APR$ ). Из подобия соответствующих

треугольников получим  $|CQ| = |PC| = \frac{ab}{a+b}$ . Следовательно,  $S_{ACQ} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |CQ| = \frac{ab^2}{2(a+b)}$ ,  $S_{APB} = S_{ACB} - S_{PCB} = \frac{1}{2}ab - \frac{a^2b}{2(a+b)} = \frac{ab^2}{2(a+b)}$ .

**295.** Докажите, что площадь треугольника с вершинами в центрах квадратов, построенных на сторонах данного треугольника и расположенных вне него, и площадь треугольника с вершинами в центрах квадратов, построенных на тех же сторонах вовнутрь данного треугольника, соответственно равны  $S + \frac{1}{8}(a^2 + b^2 + c^2)$  и  $|S - \frac{1}{8}(a^2 + b^2 + c^2)|$ , где  $a, b, c, S$  — стороны и площадь данного треугольника.

**296.** Обозначим:  $\angle A_1BC = \alpha, \angle A_1CB = \beta$ ; тогда  $AA_1$  делит  $BC$  в отношении, равном  $\frac{S_{ABA_1}}{S_{ACA_1}} = \frac{\frac{1}{2}|AB| \cdot |BA_1| \sin(\angle B + \alpha)}{\frac{1}{2}|AC| \cdot |CA_1| \sin(\angle C + \beta)} = \frac{c \sin \beta \sin(\angle B + \alpha)}{b \sin \alpha \sin(\angle C + \beta)}$ . Прделав эти же выкладки для других сторон треугольника  $ABC$ , воспользуйтесь теоремой Чебы (задача II.44).

**297.** Пусть  $KL$  — дуга окружности, находящаяся внутри треугольника  $ABC$ . Продолжив стороны  $AB$  и  $BC$  за точку  $B$ , получим дугу

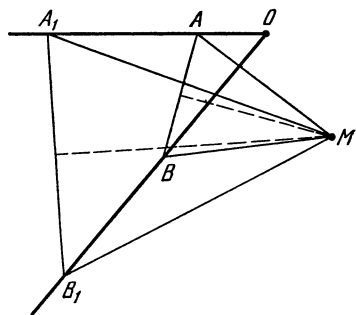


Рис. 54

$MN$ , симметричную дуге  $KL$  относительно диаметра, параллельного  $AC$ . Поскольку  $\angle B$  измеряется дугой, равной  $\frac{1}{2}(\cup KL + \cup MN) = \cup KL$ , то дуга  $KL$  имеет постоянную длину и ей соответствует центральный угол, равный углу  $B$ .

**298.** Пусть  $O$  (рис. 54) — точка пересечения прямых,  $A$  и  $A_1$  — два положения точки на одной прямой,  $B$  и  $B_1$  — положения в эти же моменты времени другой точки. Восставим к  $AB$  и  $A_1B_1$  перпендикуляры

в их серединах и обозначим через  $M$  их точку пересечения;  $\triangle AA_1M = \triangle BB_1M$  по трем сторонам — один получается из другого поворотом на угол  $\angle AOB$  с центром  $M$ . При этом повороте любое положение точки на  $AO$  приходит в соответствующее положение точки на  $OB$ , так что  $M$  обладает нужным свойством.

**299.** а) Пусть  $A$  и  $B$  — точки пересечения окружностей,  $A$  — точка, из которой велосипедисты выехали,  $M$  и  $N$  — положения велосипедистов в некоторый момент времени. Если  $M$  и  $N$  — по одну сторону от  $AB$ , то  $\angle ABM = \angle ABN$ , если по разные, то  $\angle ABM + \angle ABN = 180^\circ$ , т. е. точки  $B, M$  и  $N$  расположены на одной прямой. Если  $L$  и  $K$  — точки окружностей, диаметрально противоположные  $B$  ( $L$  и  $K$  фиксированы), то поскольку  $\angle LNM = \angle NKM = 90^\circ$ , то середина  $LK$  — точка  $P$  — будет равноудалена от  $N$  и  $M$ . Можно убедиться, что  $P$  симметрична точке  $B$  относительно середины отрезка, соединяющего центры окружностей (рис. 55, а).

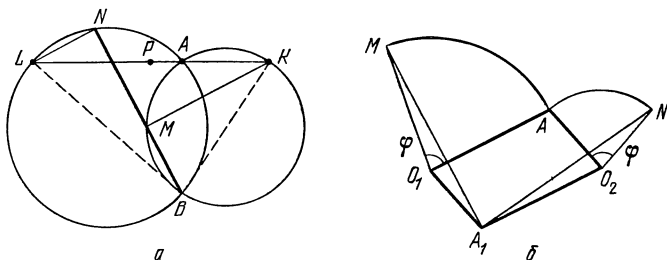


Рис. 55

б) Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры окружностей. Возьмем точку  $A_1$  такую, что  $O_1AO_2A_1$  — параллелограмм. Легко видеть, что  $\triangle MO_1A_1 = \triangle NO_2A_1$ , так как  $|MO_1| = |O_1A| = |O_2A_1|$ ,  $|O_1A_1| = |O_2A| = |NO_2|$ ,  $\angle MO_1A_1 = \varphi + \angle AO_1A_1 = \varphi + \angle AO_2A_1 = \angle NO_2A_1$ , где  $\varphi$  — угол, соответствующий дугам, пройденным велосипедистами (рис. 55, б). Таким образом, искомые точки симметричны точкам пересечения окружностей относительно середины отрезка  $O_1O_2$ . **З а м е ч а н и е.** В пункте а) можно было поступить точно так же, как и в пункте б). А именно, взяв точку  $P$  таким образом, что  $\triangle O_1PO_2 = \triangle O_1AO_2$  ( $A$  и  $P$  — по одну сторону от  $O_1O_2$  и не совпадают), легко доказать равенство соответствующих треугольников.

**300.** б) Используйте результат пункта а). Замените поворот вокруг  $O_1$  двумя осевыми симметриями, взяв в качестве оси второй симметрии прямую  $O_1O_2$ , а поворот вокруг точки  $O_2$  — двумя симметриями, взяв в качестве оси первой симметрии прямую  $O_1O_2$ . **З а м е ч а н и е.** Если  $\alpha + \beta = 2\pi$ , то последовательное применение данных поворотов, как легко убедиться, эквивалентно параллельному переносу. **О т в е т:**

если  $\alpha + \beta < 2\pi$ , то углы равны  $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \pi - \frac{\alpha + \beta}{2}$ , если  $\alpha + \beta > 2\pi$ , то углы равны  $\pi - \frac{\alpha}{2}, \pi - \frac{\beta}{2}, \frac{\alpha + \beta}{2}$ .



**301.** Произведем последовательно три поворота в одном направлении вокруг точек  $K$ ,  $L$  и  $M$  (или вокруг  $K_1$ ,  $L_1$  и  $M_1$ ) на углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Поскольку  $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ , то получившееся преобразование есть параллельный перенос (см. задачу II.300). Но поскольку одна из вершин исходного треугольника при этом останется неподвижной, то неподвижными должны остаться все точки плоскости.

Таким образом, центр третьего поворота (точка  $M$ ) должен совпадать с центром поворота, получающегося в результате последовательного применения двух первых: вокруг точек  $K$  и  $L$ . Теперь можно воспользоваться результатом задачи II.300.

**302.** Обозначим:  $\angle BOC = 2\alpha$ ,  $\angle DOE = 2\beta$ ,  $\angle FOA = 2\gamma$ . Пусть  $K$ ,  $M$  и  $L$  — соответственно точки пересечения окружностей, описанных около треугольников  $BOC$  и  $AOF$ ,  $BOC$  и  $DOE$ ,  $AOF$  и  $DOE$ . Точка  $K$  — внутри треугольника  $AOB$ , причем  $\angle BKO = 180^\circ - \angle BCO = 90^\circ + \alpha$ ,  $\angle AKO = 90^\circ + \gamma$ , а поскольку  $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ ,  $\angle AKB = 90^\circ + \beta$ . Точно так же  $L$  — внутри треугольника  $FOE$  и  $\angle OLF = 90^\circ + \gamma$ ,  $\angle OLE = 90^\circ + \beta$ ,  $\angle FLE = 90^\circ + \alpha$ . Значит,  $|OL| = |AK|$ ,  $\angle KOL = 2\gamma + \angle KOA + \angle LOF = 2\gamma + \angle KOA + \angle KAO = 90^\circ + \gamma = \angle AKO$ ; таким образом, треугольники  $KOL$  и  $AKO$  равны, т. е.  $|KL| = |AO| = R$ . Аналогично доказывается, что и две другие стороны треугольника  $KLM$  равны  $R$ .

**303.** Обозначения:  $ABCD$  — данный четырехугольник,  $O_1, O_2, O_3, O_4$  — центры ромбов, построенных соответственно на  $AB, BC, CD, DA$ ;  $K$  и  $L$  — середины сторон  $AB$  и  $BC$ ,  $M$  — середина диагонали  $AC$ . Треугольники  $O_1KM$  и  $O_2LM$  равны ( $|O_1K| = \frac{1}{2}|AB| = |LM|$ ,  $|KM| = \frac{1}{2}|BC| = |O_2L|$ ,  $\angle O_1KM = \angle O_2LM$ ). При этом, если  $\angle ABC + \alpha <$

$< \pi$ , то эти треугольники расположены вовнутрь треугольника  $O_1MO_2$ , а если  $\angle ABC + \alpha > \pi$ , то эти треугольники находятся вне треугольника  $O_1MO_2$  (углы ромбов с вершиной  $B$  равны  $\alpha$ ). Таким образом,  $|O_1M| = |O_2M|$ ,  $\angle O_1MO_2 = \pi - \alpha$ . Точно так же  $|O_3M| = |O_4M|$ ,  $\angle O_3MO_4 = \pi - \alpha$ . Следовательно, треугольники  $O_1MO_3$  и  $O_2MO_4$  равны, и один получается из другого поворотом вокруг  $M$  на угол  $\pi - \alpha$ . Отсюда следует утверждение задачи.

**304.** Пусть  $ABC$  — данный треугольник,  $A_1B_1C_1$  — треугольник  $\Delta$ ,  $A_2B_2C_2$  — треугольник  $\delta$  ( $A_1$  и  $A_2$  — центры треугольников, построенных на  $BC$ ), стороны треугольника  $ABC$ , как обычно, равны  $a, b, c$ .

а) То что треугольники  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  — правильные, следует, например, из результата задачи II.301.

б) Докажем более общее утверждение. Если на сторонах  $\triangle ABC$  во внешнюю (или во внутреннюю) сторону построены подобные треугольники  $A_1BC, B_1CA, C_1AB$  так, что  $\angle A_1BC = \angle B_1CA = \angle C_1AB$ ,  $\angle A_1CB = \angle B_1AC = \angle C_1BA$ , то точки пересечения медиан треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  совпадают. Заметим сначала, что если  $M$  — точка пересечения медиан  $\triangle ABC$ , то  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 0$  и, наоборот, если выполняется это равенство, то  $M$  — точка пересечения медиан  $\triangle ABC$ . Осталось проверить, что  $\vec{MA}_1 + \vec{MB}_1 + \vec{MC}_1 = 0$ , или  $(\vec{MA} + \vec{AC}_1) +$

$+(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA_1}) + (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB_1}) = 0$ . Но  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$ . Кроме того,  $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} = 0$ , поскольку каждый из векторов  $\overrightarrow{AC_1}$ ,  $\overrightarrow{BA_1}$ ,  $\overrightarrow{CB_1}$  получается из  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CA}$  поворотом на один и тот же угол ( $\angle A_1BC$ ) и умножением на одно и то же число.

в) Рассмотрим более общий случай. На сторонах  $\triangle ABC$  во вне и во внутрь его построены как на основаниях равнобедренные треугольники  $A_1BC$ ,  $B_1CA$ ,  $C_1BA$  и  $A'_1BC$ ,  $B'_1CA$ ,  $C'_1BA$ , в которых отношение высоты, опущенной на основание, к длине основания равно  $k$ . Пусть  $O$  — центр описанной около  $\triangle ABC$  окружности,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — его стороны,  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  — соответственно середины  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ . Будем считать для определенности, что  $ABC$  — остроугольный треугольник. Тогда

$$\begin{aligned} S_{A_1OC_1} &= \frac{1}{2} |A_1O| \cdot |C_1O| \sin B = \frac{1}{2} (|OA_0| + ka)(|OC_0| + kc) \sin B = \\ &= \frac{1}{2} |OA_0| \cdot |OC_0| \sin B + \frac{1}{2} k^2 ac \sin B + \frac{k}{2} (a|OC_0| + c|OA_0|) \sin B = \\ &= k^2 S_{ABC} + S_{A_0OC_0} + \frac{k}{4} b^2. \end{aligned}$$

Получив аналогичные соотношения для треугольников  $A_1OB_1$  и  $B_1OC_1$  и сложив их, найдем:  $S_{A_1B_1C_1} = \left(3k^2 + \frac{1}{4}\right) S_{ABC} + \frac{k}{4} (a^2 + b^2 + c^2)$  (это равенство остается справедливым, если  $\triangle ABC$  — тупоугольный). Для  $\triangle A'_1B'_1C'_1$  будем иметь:

$$\begin{aligned} S_{A'_1B'_1C'_1} &= \left| \frac{k}{4} (a^2 + b^2 + c^2) - \left(3k^2 + \frac{1}{4}\right) S_{ABC} \right|. \text{ Следовательно, если} \\ \frac{k}{4} (a^2 + b^2 + c^2) - \left(3k^2 + \frac{1}{4}\right) S_{ABC} &\geq 0, \text{ то } S_{A_1B_1C_1} - S_{A'_1B'_1C'_1} = \left(6k^2 + \frac{1}{2}\right) S_{ABC}, \\ \text{если же } \frac{k}{4} (a^2 + b^2 + c^2) - \left(3k^2 + \frac{1}{4}\right) S_{ABC} < 0, &\text{ то } S_{A_1B_1C_1} - \\ - S_{A'_1B'_1C'_1} &= \frac{k}{2} (a^2 + b^2 + c^2). \text{ Можно доказать, что всегда } a^2 + b^2 + \\ + c^2 &\geq 4\sqrt{3} S_{ABC} \text{ (в задаче II.362 доказывается более сильное нера-} \\ \text{венство), а это означает, что при } k = \frac{1}{2\sqrt{3}} &\text{ разность площадей тре-} \\ \text{угольников } A_1B_1C_1 \text{ и } A'_1B'_1C'_1 &\text{ равна } S_{ABC}. \end{aligned}$$

**305.** Пусть три данные точки образуют треугольник  $ABC$ . Возможны два семейства правильных треугольников, описанных около  $\triangle ABC$ . Первое семейство получается следующим образом. Построим на сторонах треугольника окружности таким образом, что дуги этих окружностей, расположенные вне треугольника, измеряются углом  $4\pi/3$ . Возьмем произвольную точку  $A_1$  окружности, построенной на  $BC$ , прямая  $A_1B$  вторично пересекает окружность, построенную на  $BA$  в точке  $C_1$ , а прямая  $A_1C$  пересечет окружность, построенную на  $CA$  в точке  $B_1$ . Треугольник  $A_1B_1C_1$  — один из треугольников первого семейства. Обозначим через  $E$ ,  $F$  и  $G$  точки пересечения биссектрис  $\triangle A_1B_1C_1$  с окружностями, построенными на сторонах данного треугольника. Точки  $E$ ,  $F$  и  $G$  — фиксированы ( $E$  — середина дуги окружности, построенной на  $BC$  и расположенной по ту же сторону от  $BC$ , что и  $\triangle ABC$ ). Точки  $E$ ,  $F$  и  $G$  являются центрами правильных треугольни-

ков, построенных на сторонах  $\triangle ABC$  внутрь его. Треугольник  $EFG$  — правильный (см. задачу II.304), его центр совпадает с точкой пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Центр  $\triangle A_1B_1C_1$  лежит на окружности, описанной около  $EFG$ , квадрат радиуса этой окружности равен (см. решение задачи II.304)  $\frac{1}{9} \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - 2S\sqrt{3} \right)$ , где  $a, b, c$  — стороны,  $S$  — площадь  $\triangle ABC$ .

Второе семейство правильных треугольников, описанных около  $\triangle ABC$ , получается, если построить на сторонах  $\triangle ABC$  окружности, дуги которых, расположенные вне  $\triangle ABC$ , равны  $2\pi/3$ .

Искомое геометрическое место точек состоит из двух концентрических окружностей, центры которых совпадают с точкой пересечения

медиан  $\triangle ABC$ , а радиусы равны  $\frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \pm 2S\sqrt{3}}$ .

**306.** Докажем, что треугольники  $CB_1A_2$  и  $CA_1B_2$  получаются один из другого поворотом около точки  $C$  на угол  $90^\circ$ . В самом деле,  $\triangle CAA_1 = \triangle CBB_1$  ( $|BB_1| = |AC|$ ,  $|BC| = |AA_1|$ ,  $\angle CBB_1 = \angle CAA_1$ ), а поскольку  $AA_1 \perp BC$  и  $BB_1 \perp AC$ , то  $B_1C \perp A_1C$ . Точно так же  $A_2C$  и  $B_2C$  равны и перпендикулярны.

**307.** Докажите, что касательные к окружности, проведенные из вершин, между которыми расположена одна вершина многоугольника, равны. Отсюда следует, что для многоугольника с нечетным числом сторон точки касания являются серединами сторон.

**308.** Заметим, что если рассмотреть систему из векторов, имеющих начало в центре правильного  $n$ -угольника, а концы в его вершинах, то сумма этих векторов равна нулю. В самом деле, если повернуть все эти векторы на угол  $2\pi/n$ , то их сумма не изменится, а с другой стороны, вектор, равный их сумме, повернется на этот же угол. Значит, и сумма проекций этих векторов на любую ось равна нулю.

Вернемся к задаче. Если  $\varphi$  — угол между данной прямой (обозначим ее через  $l$ ) и одним из векторов, то остальные векторы образуют углы  $\varphi + \frac{2\pi}{n}$ ,  $\varphi + 2\frac{2\pi}{n}$ , ...,  $\varphi + (n-1)\frac{2\pi}{n}$ . Квадрат расстояния от  $k$ -й

вершины до  $l$  равен  $\sin^2 \left( \varphi + k \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( 2\varphi + k \frac{4\pi}{n} \right) \right)$ . Но величины  $\cos \left( 2\varphi + k \frac{4\pi}{n} \right)$  можно рассматривать как проекции на  $l$  си-

стемы  $n$  векторов, образующие с  $l$  углы  $2\varphi + k \frac{4\pi}{n}$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ).

При  $n$  нечетном эти векторы образуют правильный  $n$ -угольник, при  $n$  четном будет дважды повторенный  $\frac{n}{2}$ -угольник. Ответ:  $\frac{n}{2}$ .

**309.** а) Если сторона многоугольника равна  $a$ ,  $S$  — его площадь,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — расстояния от некоторой точки внутри него до сторон, то утверждение задачи следует из равенства  $S = (ax_1 + ax_2 + \dots + ax_n)/2$ .

б) Рассмотрим правильный многоугольник, содержащий данный внутри себя, стороны которого параллельны сторонам данного. Сумма расстояний от произвольной точки внутри данного многоугольника до сторон правильного — постоянна (пункт а) и отличается от суммы расстояний до сторон данного на постоянную величину.

310. Обозначим через  $B_1, B_2, \dots, B_{n+1}$  точки, симметричные  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  относительно диаметра  $A_0A_{2n+1}$ ,  $C_k$  и  $C'_k$  — точки пересечения прямой  $A_kA_{2n+1-k}$  с  $OA_n$  и  $OA_{n+1}$ . Пусть  $D_{k-1}$  и  $D_k$  — точки пересечения прямых  $A_kB_{k-1}$  и  $A_kB_{k+1}$  с диаметром. Очевидно, что эти же точки являются точками пересечения с диаметром прямых  $B_kA_{k-1}$  и  $B_kA_{k+1}$ . Очевидно, что  $\triangle D_{k-1}A_kD_k = \triangle C_kOC'_k$ . Таким образом, сумма отрезков  $C_kC'_k$  равна сумме отрезков  $D_{k-1}D_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ),  $D_0 = A_0$ ,  $D_n = O$ , т. е. равна радиусу.

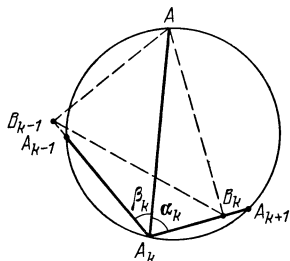


Рис. 56

311. Пусть  $A$  (рис. 56) — данная точка,  $A_k$  — какая-то вершина  $2n$ -угольника,  $B_{k-1}$  и  $B_k$  — основания перпендикуляров, опущенных из  $A$  на стороны, заключающие  $A_k$ ,  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  — углы, образованные прямой  $AA_k$  с этими сторонами ( $\beta_k = \angle AA_kB_{k-1}$ ,  $\alpha_k = \angle AA_kB_k$ ). Поскольку около четырехугольника  $AB_{k-1}A_kB_k$  можно описать окружность, то  $\angle AB_{k-1}B_k = \alpha_k$ ,  $\angle AB_kB_{k-1} = \beta_k$  (или дополняют эти углы до  $180^\circ$ ); таким образом, по теореме синусов  $\frac{|AB_{k-1}|}{|AB_k|} = \frac{\sin \beta_k}{\sin \alpha_k}$ ,  $\frac{|AB_{k-1}| \cdot |AB_{k+1}|}{|AB_k|^2} = \frac{\sin \beta_k \sin \alpha_{k+1}}{\sin \alpha_k \sin \beta_{k+1}}$ . Перемножая эти равенства для  $k = 2, 4, \dots, 2n$ , заменяя индекс  $2n+1$  на 1, получим требуемый результат.

312. Докажите, что если  $O_k$  и  $O_{k+1}$  — центры окружностей, касающихся данной окружности в точках  $A_k$  и  $A_{k+1}$ ,  $B$  — точка их пересечения, лежащая на хорде  $A_kA_{k+1}$ ;  $r_k, r_{k+1}$  — их радиусы, то  $r_k + r_{k+1} = r$ ,  $\angle A_kO_kB = \angle A_{k+1}O_{k+1}B = \angle A_kOA_{k+1}$  ( $r$  — радиус данной окружности,  $O$  — ее центр). Отсюда следует равенство радиусов через один, что при  $n$  нечетном приведет к тому, что все они — по  $r/2$ . Кроме того,  $\cup A_kB + \cup BA_{k+1} = \cup A_kA_{k+1}$  (берутся меньшие дуги соответствующих окружностей).

313. а) Пусть  $A$  — произвольная точка окружности ( $A$  — на дуге  $A_1A_{2n+1}$ ). Обозначим сторону многоугольника через  $a$ , а длину диагонали, соединяющей вершины через одну, — через  $b$ . По теореме Птолемея (задача П.237) для четырехугольника  $AA_kA_{k+1}A_{k+2}$  имеем:  $|AA_k| \cdot a + |AA_{k+2}| \cdot a = |AA_{k+1}| \cdot b$  ( $k = 1, 2, \dots, 2n-1$ ). Аналогичные соотношения можно записать для четырехугольников  $A_{2n}A_{2n+1}AA_1$  и  $A_{2n+1}AA_1A_2$ :

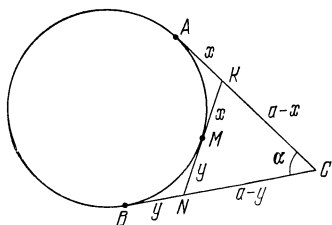
$$|AA_1| \cdot a + |AA_{2n+1}| \cdot b = |AA_{2n}| \cdot a,$$

$$|AA_{2n+1}| \cdot a + |AA_1| \cdot b = |AA_2| \cdot a.$$

Сложив все эти равенства, оставляя вершины с четными номерами справа, а с нечетными слева, получим требуемое утверждение.

б) Наше утверждение следует из пункта а) и результата задачи I.206. (Аналогичную формулу можно получить в случае внутреннего касания.)

314. а) Пусть  $l$  пересекает  $AC$  и  $BC$  соответственно в точках  $K$  и  $N$  и касается окружности в точке  $M$  (рис. 57). Обозначим:



$$\begin{aligned} |AC| &= |BC| = a, \quad |AK| = |KM| = x, \\ |BN| &= |NM| = y. \quad \text{Очевидно, } \frac{w^2}{uv} = \\ &= \frac{(a-x)(a-y)}{xy}, \text{ но по теореме ко-} \\ &\text{синусов для } \triangle CKN \text{ верно равенство} \\ (x+y)^2 &= (a-x)^2 + (a-y)^2 - \\ &- 2(a-x)(a-y)\cos\alpha \Rightarrow \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \\ &= \frac{xy}{(a-x)(a-y)}. \end{aligned}$$

Рис. 57

Таким образом,  $\frac{uv}{w^2} = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ . (Аналогично рассматриваются другие случаи расположения прямой  $l$ .)

б) Воспользуемся результатом пункта а) Перемножая соответствующие равенства для всех углов  $n$ -угольника, получим квадрат искомого отношения, а само отношение окажется равным

$1/(\sin \frac{\alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_2}{2} \dots \sin \frac{\alpha_n}{2})$ , где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — углы многоугольника.

в) Воспользуемся результатом пункта а). Если обозначим точки касания сторон  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{2n-1}A_{2n}, A_{2n}A_1$  с окружностью соответственно через  $B_1, B_2, \dots, B_{2n-1}, B_{2n}$ , через  $x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}$  — соответственно расстояния от  $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$  до  $l$ , через  $y_1, y_2, \dots, y_{2n}$  — соответственно расстояния от  $B_1, B_2, \dots, B_{2n}$  до  $l$ , то получим:

$$\frac{x_1^2}{y_{2n}y_1} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha_1}{2}}, \quad \frac{x_2^2}{y_1y_2} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha_2}{2}}, \quad \dots, \quad \frac{x_{2n}^2}{y_{2n-1}y_{2n}} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha_{2n}}{2}},$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}$  — углы многоугольника. Перемножая равенства, содержащие  $x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}$ , и деля на произведение остальных равенств, получим:

$$\left( \frac{x_1 x_3 \dots x_{2n-1}}{x_2 x_4 \dots x_{2n}} \right)^2 = \left( \frac{\sin \frac{\alpha_2}{2} \sin \frac{\alpha_4}{2} \dots \sin \frac{\alpha_{2n}}{2}}{\sin \frac{\alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_3}{2} \dots \sin \frac{\alpha_{2n-1}}{2}} \right)^2.$$

315. Утверждение задачи может быть доказано по индукции. Начало индукции,  $n = 4$ , разобрано в задаче II.235.

Можно предложить, однако, иной путь, основанный на следующем равенстве. Пусть в треугольнике  $ABC$  угол  $A$  — наибольший,  $r$  и  $R$  — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей,  $d_a, d_b, d_c$  — расстояния от центра описанной окружности до соответствующих

щих сторон треугольника. Тогда

$$r + R = d_a + d_b + d_c \quad (1)$$

для остроугольного треугольника и

$$r + R = -d_a + d_b + d_c \quad (2)$$

для тупоугольного треугольника (для прямоугольного треугольника  $d_a = 0$  и для него верно любое из приведенных соотношений).

**Доказательство.** Пусть  $ABC$  — остроугольный треугольник,  $A_0, B_0, C_0$  — соответственно середины сторон  $BC, CA, AB$ ,  $O$  — центр описанной окружности. По теореме Птолемея (задача II.237) для четырехугольника  $AB_0OC_0$  имеем:  $\frac{b}{2}d_c + \frac{c}{2}d_b = \frac{a}{2}R$ . Записав еще два таких соотношения для четырехугольников  $BC_0OA_0$  и  $CB_0OA_0$  и сложив их, получим:

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)d_c + \left(\frac{a}{2} + \frac{c}{2}\right)d_b + \left(\frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right)d_a = \frac{1}{2}(a+b+c)R = pR,$$

откуда  $p(d_a + d_b + d_c) - \frac{1}{2}(cd_c + bd_b + ad_a) = pR$ . Поскольку  $\frac{1}{2}(cd_c + bd_b + ad_a) = S = pr$ , то после сокращения на  $p$  получим равенство (1). Аналогично рассматривается случай  $\angle A > 90^\circ$ .

Из соотношений (1), (2) следует утверждение задачи. Для этого запишем соответствующие равенства для всех треугольников разбиения. Заметим, что каждая диагональ является стороной для двух треугольников. Следовательно, в соотношения, соответствующие этим треугольникам, расстояние до выбранной диагонали войдет с противоположными знаками. Значит, если мы сложим все эти равенства, то получим, при условии, что центр окружности внутри многоугольника  $\sum r + R = d_1 + d_2 + \dots + d_n$ , где  $d_1, d_2, \dots, d_n$  — расстояния от центра окружности до сторон многоугольника. Если же центр окружности вне многоугольника, то расстояние до наибольшей стороны надо взять со знаком минус.

**316.** Рассмотрим, для определенности, случай, когда точка  $M$  находится внутри многоугольника. Обозначим через  $u$  и  $v$  расстояния от  $M$  до  $A_1A_2$  и  $A_1A_n$  соответственно, а через  $x$  и  $y$  соответственно проекции  $A_1M$  на  $A_1A_2$  и  $A_1A_n$  (величины  $x$  и  $y$  надо считать положительными, если эти проекции расположены на лучах  $A_1A_2$  и  $A_1A_n$ , и отрицательными в противоположном случае),  $|A_1B_1| = |A_1B_n| = a$ ,

$\angle A_2A_1A_n = \alpha$ . Можно выразить  $u$  и  $v$  через  $x$  и  $y$ :  $u = \frac{y}{\sin \alpha} - x \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ,

$v = \frac{x}{\sin \alpha} - y \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ; отсюда  $u + v = (x + y) \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = (x + y) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = (x + y) \frac{r}{a}$ . Теперь имеем:

$$\begin{aligned} (|MB_1|^2 + |MB_n|^2)a &= ((x-a)^2 + u^2 + (y-a)^2 + v^2)a = \\ &= ((x-a)^2 + (u-r)^2 + (y-a)^2 + (v-r)^2 + 2r(u+v) - 2r^2)a = \\ &= 2d^2a + 2ra(u+v) - 2r^2a = 2d^2a + 2r^2(x+y) - 2r^2a. \end{aligned}$$



Рассмотрим окружность  $\gamma$ , касающуюся  $KP$  и  $PL$  соответственно в точках  $K$  и  $L$ . Центр этой окружности находится на прямой, проходящей через центры  $\alpha$  и  $\beta$  (см. задачу II.12).

Пусть прямая  $D_2C_2$  пересекает  $A_2B_2$  и  $A_3B_3$  в точках  $L'$  и  $M$  соответственно. Как и в предыдущем случае, докажем, что существует окружность  $\gamma'$  с центром на прямой, проходящей через центры  $\alpha$  и  $\beta$  и касающаяся  $A_2B_2$  и  $A_3B_3$  в точках  $L'$  и  $M$  соответственно. Докажем, что  $\gamma$  и  $\gamma'$  совпадают. Для этого достаточно доказать совпадение  $L$

и  $L'$ . Имеем: 
$$\frac{|A_2L|}{|LB_2|} = \frac{S_{A_2C_1D_1}}{S_{B_2C_1D_1}} = \frac{\frac{1}{2}|D_1C_1| \cdot |A_2C_1| \sin \angle A_2C_1D_1}{\frac{1}{2}|D_1C_1| \cdot |B_2D_1| \sin \angle B_2D_1C_1} = \frac{|A_2C_1|}{|B_2D_1|}.$$
 Аналогично  $\frac{|A_2L'|}{|L'B_2|} = \frac{|A_2C_2|}{|B_2D_2|} = \frac{|A_2C_1|}{|B_2D_1|}$ , т. е.  $L$  и  $L'$  совпадают. **З а м е ч а н и е.** Из рассуждений следует, что в рассматриваемом случае точки касания  $\gamma$  с прямыми  $A_1B_1, A_2B_2, \dots$ , находятся внутри отрезков  $A_1B_1, A_2B_2, \dots$ .

**319.** В обозначениях предыдущей задачи утверждение сводится к следующему: если  $A_{n+1}$  совпадает с  $A_1$ , то и  $B_{n+1}$  совпадает с  $B_1$ . Допустим, это не так. Тогда  $A_1B_1$  и  $A_1B_{n+1}$  касаются окружности  $\gamma$ ,  $A_1A_2$  пересекает  $\gamma$ ,  $B_1$  и  $B_{n+1}$  находятся на дуге  $A_1A_2$ , соответствующей сегменту, не содержащему  $\beta$ . Точки касания  $A_1B_1$  и  $A_1B_{n+1}$  с  $\gamma$  лежат внутри отрезков  $A_1B_1$  и  $A_1B_{n+1}$ . Получается, что из  $A_1$  к  $\gamma$  проведены две касательные, причем точки их касания с  $\gamma$  находятся по одну сторону от секущей  $A_1A_2$ . Этого быть не может.

**320.** Рассмотрим  $\triangle B_0XC_0$ . Прямая  $XR$  является биссектрисой угла  $C_0XB_0$ . Легко проверить, что  $\angle C_0RB_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \angle C_0XB_0$ . Отсюда следует, что  $C_0R$  и  $B_0R$  являются биссектрисами углов  $XC_0B_0$  и  $XB_0C_0$  (см. задачу I.46). Точно так же в треугольниках  $C_0YA_0$  и  $A_0ZB_0$  точки  $P$  и  $Q$  являются точками пересечения биссектрис. Отсюда, учитывая, что  $\angle PA_0Q = \angle A/3$ ,  $\angle QB_0R = \angle B/3$ ,  $\angle RC_0P = \angle C/3$ , получаем утверждение, из которого следует теорема Морлея.

**321.** При решении задачи используем следующие легко доказываемые утверждения.

а) Если на биссектрисе внутреннего угла  $M$  треугольника  $KLM$  внутри него взята точка  $N$  так, что  $\angle KNL = \frac{1}{2}(\pi + \angle KML)$ , то  $N$  — точка пересечения биссектрис  $\triangle KLM$  (см. задачу I.46).

б) Если внутри угла  $KML$  вне  $\triangle KLM$  на продолжении биссектрисы внутреннего угла  $M$  взята точка  $N$  так, что  $\angle KNL = \frac{1}{2}(\pi - \angle KML)$ , то  $N$  — точка пересечения биссектрисы угла  $M$  и биссектрис внешних углов  $K$  и  $L$ .

в) Если на биссектрисе внешнего угла  $K$  треугольника  $KML$  внутри угла  $KML$  взята точка  $N$  так, что  $\angle MNL = \frac{1}{2} \angle MKL$ , то  $N$  —



точка пересечения биссектрисы угла  $M$  и биссектрис внешних углов  $K$  и  $L$ .

Доказательство нашего утверждения для всех возможных значений  $i, j, k$  (а их, с точностью до перестановки индексов  $i, j, k$  оказывается семь случаев) проведем по одной схеме. Каждый раз будем формулировать и доказывать соответствующее обратное утверждение, эквивалентное рассматриваемому случаю теоремы Морлея. Пример рассуждения по такой схеме дает предыдущая задача. Чтобы не повторяться, выделим вначале общую часть рассуждений. Рассмотрим правильный треугольник  $PQR$ . На его сторонах как на основаниях построены равнобедренные треугольники  $PXQ, QYR, RZP$  (как и какие треугольники построены, для каждого случая укажем дальше). Обозначим через  $A_0$  точку пересечения прямых  $ZP$  и  $YQ$ , через  $B_0$  — точку пересечения прямых  $XQ$  и  $ZR$ , через  $C_0$  — прямых  $YR$  и  $XP$ . Тогда для каждого случая докажем, что треугольник  $A_0B_0C_0$  подобен треугольнику  $ABC$ , а лучи  $A_0P$  и  $A_0Q, B_0Q$  и  $B_0R, C_0R$  и  $C_0P$  являются для него триссектрисами соответствующего рода.

Укажем теперь, как и какие треугольники следует строить на сторонах треугольника  $PQR$  в каждом случае.

1)  $i = j = k = 1$ ;  $\angle PXQ = \frac{1}{3}(\pi + 2\angle A)$ ,  $\angle QYR = \frac{1}{3}(\pi + 2\angle B)$ ,  $\angle RZP = \frac{1}{3}(\pi + 2\angle C)$ . Все треугольники расположены во внешнюю по отношению к  $\triangle PQR$  сторону.

2)  $i = 1, j = k = 2$ ;  $\angle PXQ = \frac{1}{3}(\pi - 2\angle A)$ ,  $\angle QYR = \pi - \frac{2\angle B}{3}$ ,  $\angle RZP = \pi - \frac{2\angle C}{3}$ . Все треугольники расположены во внешнюю по отношению к  $\triangle PQR$  сторону. (Считаем, что  $\angle A < \pi/2$ . Если же  $\angle A > \pi/2$ , то  $\triangle PXQ$  «выворачивается» на другую сторону  $\triangle PQR$ ,  $\angle PXQ = \frac{1}{3}(2\angle A - \pi)$ . Если  $\angle A = \pi/2$ , то  $\triangle PXQ$  превратится в пару параллельных прямых. Это замечание следует иметь в виду и далее.)

3)  $i = j = 1, k = 3$ ;  $\angle PXQ = \frac{1}{3}(\pi - 2\angle A)$ ,  $\angle QYR = \frac{1}{3}(\pi - 2\angle B)$ ,  $\angle RZP = \frac{1}{3}(\pi + 2\angle C)$ . Треугольники  $PXQ$  и  $QYR$  расположены во внешнюю по отношению к  $\triangle PQR$  сторону, а  $\triangle RZP$  — во внутреннюю (см. замечание к пункту 2).

4)  $i = j = k = 2$ ;  $\angle PXQ = \frac{1}{3}(\pi - 2\angle A)$ ,  $\angle QYR = \frac{1}{3}(\pi - 2\angle B)$ ,  $\angle RZP = \frac{1}{3}(\pi - 2\angle C)$ . Все треугольники расположены по ту же сторону от соответствующих сторон  $\triangle PQR$ , что и сам  $\triangle PQR$  (см. замечание к пункту 2).

5)  $i = 1, j = 2, k = 3$ ;  $\angle PXQ = \frac{1}{3}(\pi + 2\angle A)$ ,  $\angle QYR = \frac{1}{3}(\pi -$

$-2 \angle B$ ),  $\angle RZP = \pi - \frac{2 \angle C}{3}$ . Треугольник  $PXQ$  построен во внешнюю по отношению к  $\triangle PQR$  сторону, а два другие — во внутреннюю (см. замечание к пункту 2).

6)  $i = 2, j = k = 3$ ;  $\angle PXQ = \pi - \frac{2 \angle A}{3}$ ,  $\angle QYR = \frac{1}{3}(\pi + 2 \angle B)$ ,  $\angle RZP = \frac{1}{3}(\pi + 2 \angle C)$ . Треугольник  $PXQ$  расположен во внешнюю, а два другие во внутреннюю по отношению к  $\triangle PQR$  сторону.

7)  $i = j = k = 3$ ;  $\angle PXQ = \pi - \frac{2 \angle A}{3}$ ,  $\angle QYR = \pi - \frac{2 \angle B}{3}$ ,  $\angle RZP = \pi - \frac{2 \angle C}{3}$ . Все треугольники расположены внутри  $\triangle PQR$ .

Пункт 1 доказан в задаче П.320.

Докажем, для примера, пункт 2.

Пусть  $\angle A < \pi/2$ . Рассмотрим треугольник  $B_0XC_0$ , в котором  $XR$  — биссектриса угла  $B_0XC_0$ . Кроме того,  $\angle B_0RC_0 = \frac{1}{2}(\pi + \angle B_0XC_0)$ . В соответствии с утверждением а)  $R$  — точка пересечения биссектрис этого треугольника (если  $A > \pi/2$ , то  $B_0R$  и  $C_0R$  — биссектрисы внешних углов треугольника  $B_0XC_0$ ). Далее, в  $C_0YA_0$  имеем:  $YP$  — биссектриса внешнего угла  $Y$ ,  $\angle A_0PC_0 = \frac{1}{2} \angle AYC_0$  (это легко проверить). В соответствии с утверждением в)  $P$  — точка пересечения биссектрисы угла  $C_0A_0Y$  и биссектрис внешних углов  $A_0C_0Y$  и  $C_0YA_0$  треугольника  $C_0YA_0$ . Точно так же точка  $Q$  по отношению к  $\triangle A_0ZB_0$  является точкой пересечения биссектрисы угла  $ZA_0B_0$  и биссектрис внешних углов  $A_0ZB_0$  и  $A_0B_0Z$ . (Из этого следует, что треугольник  $PQR$  по отношению к треугольнику  $A_0B_0C_0$  образован пересечением трисектрис первого рода угла  $A_0$  с трисектрисами второго рода углов  $B_0$  и  $C_0$  (имеется в виду пункт 2).) Сам же  $\triangle A_0B_0C_0$  подобен  $\triangle ABC$ .

Во всех оставшихся пунктах 3 — 7 рассуждения аналогичны, варьируются лишь используемые утверждения а), б), в).

Меняя местами индексы  $i, j, k$ , заметим, что пункту 5 соответствуют шесть правильных треугольников, пунктам 2, 3, 6 — по три правильных треугольника каждому, пунктам 1, 4 и 7 — по одному правильному треугольнику. Всего, таким образом, получаем восемнадцать правильных треугольников.

Теперь в каждом случае выберем размеры  $\triangle PQR$  таким образом, чтобы соответствующий  $\triangle A_0B_0C_0$  был бы равен  $\triangle ABC$ . Будем накладывать получившиеся восемнадцать чертежей один на другой так, чтобы совместились треугольники  $ABC$ . Порядок накладывания выберем следующий: сначала берем чертеж, соответствующий пункту 1, затем три чертежа, соответствующие пункту 3, потом шесть чертежей пункта 5, потом три чертежа пункта 2 и, наконец, три чертежа пункта 6 и по одному — пунктов 4 и 7. При каждом очередном наложении хотя бы одна из вершин соответствующего правильного треугольника должна совпасть с одной из вершин уже имеющихся правильных тре-

угольников. Подсчет углов показывает, что пять вершин двух правильных треугольников, имеющих общую вершину, лежат на двух прямых, проходящих через эту общую вершину. Таким образом, вершины всех восемнадцати правильных треугольников «обязаны» расположиться так, как показано на рис. 59. (На этом рисунке через  $\alpha_1\beta'_1$  и т. д. обозначена точка пересечения трисектрис  $\alpha_1$  и  $\beta'_1$ .)

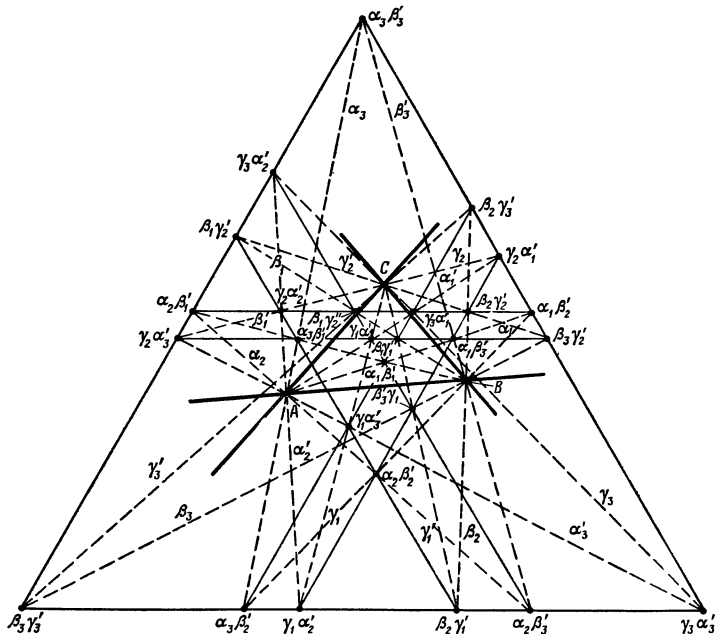


Рис. 59

322. Для правильного треугольника со стороной 1 радиус каждой из окружностей Мальфатти равен  $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ . Сумма площадей соответствующих кругов  $\frac{3\pi(2-\sqrt{3})}{8}$ . Сумма же площадей трех кругов, один из которых вписан в этот треугольник, а два других касаются его и двух сторон треугольника каждый, равна  $\frac{11\pi}{108} > \frac{3\pi(2-\sqrt{3})}{8}$ .

323. Воспользуйтесь равенством  $Rr = \frac{abc}{4p}$  и неравенством  $2p = a + b + c \geq 3\sqrt{abc}$  (теорема о среднем).

324. Если  $p_1$  — полупериметр треугольника с вершинами в основаниях высот данного,  $p$ ,  $S$ ,  $r$  и  $R$  соответственно полупериметр, площадь, радиус вписанной окружности и радиус описанной окружности, то  $S =$

$= pr$  и, кроме того,  $S = p_1 R$  (последнее следует из того, что радиус описанной окружности, идущий в вершину треугольника, перпендикулярен отрезку, соединяющему основания высот, опущенных на стороны, из этой вершины выходящие). Следовательно,  $p_1 = p \frac{r}{R} \leq \frac{1}{2} p$ .

**325.** Если  $m_a$  — наибольшая из медиан, то, заменяя в соотношении  $m_a^2 > m_b^2 + m_c^2$ , следующем из условия, медианы через стороны  $a, b$  и  $c$  треугольника (задача I.11), получим, что  $5a^2 < b^2 + c^2$ , откуда  $\cos A > \frac{2(b^2 + c^2)}{5bc} = \frac{2}{5} \left( \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \geq \frac{4}{5} > \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**326.** Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей четырехугольника  $ABCD$ . Предположим, что все углы, указанные в условии, больше  $\pi/4$ . Тогда на отрезках  $OB$  и  $OC$  можно взять соответственно точки  $B_1$  и  $C_1$  так, что  $\angle B_1AO = \angle OB_1C_1 = \pi/4$ . Пусть  $\angle BOA = \alpha > \pi/4$ . Имеем:

$$|OC| > |OC_1| = \frac{|OB_1|}{\sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{|OA|}{2 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{|OA|}{\cos 2\alpha} \geq |OA|.$$

Точно так же докажем неравенство  $|OA| > |OC|$ . Противоречие.

**327.** Пусть в  $\triangle ABC$  стороны связаны соотношением  $c \leq b \leq a$ . Возьмем на  $CB$  точку  $M$  так, что  $\angle CAM = \frac{1}{2} \angle C$ . Надо доказать, что  $|CM| \leq \frac{a}{2}$ . По теореме синусов для  $\triangle CAM$  имеем:  $|CM| = \frac{b \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{3C}{2}} = \frac{b}{2 \cos C + 1} = \frac{ab^2}{a^2 + ab + b^2 - c^2} \leq \frac{a}{2}$ .

**328.** Пусть  $D$  — середина  $AC$ . Восставим в  $D$  перпендикуляр к  $AC$  и обозначим через  $M$  точку пересечения его с  $BC$ ;  $\triangle AMC$  — равнобедренный, значит,  $\angle MAC = \angle BCA$ . По условию  $\triangle ABD$  также равнобедренный,  $\angle ABD = \angle BDA$ ,  $\angle ABM > 90^\circ$  (по условию),  $\angle ADM = 90^\circ$ ; значит,  $\angle MBD > \angle MDB$  и  $|MD| > |BM|$ . Отсюда следует, что  $\angle MAD > \angle MAB$  (если отобразим симметрично  $B$  относительно прямой  $AM$ , то получим точку  $B_1$  внутри угла  $MAD$ , так как  $MD \perp AD$  и  $|MD| > |MB| = |MB_1|$ ; таким образом,  $\angle C > \angle A - \angle C$ ,  $\angle C > \frac{1}{2} \angle A$ ).

**329.** Если окружность касается продолжений сторон  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  и ее центр  $O$ , то легко найти, что  $\angle BOC = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$ . Таким образом,  $\angle BOC + \angle A = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A \neq 180^\circ$ .

**330.** Пусть  $AD$  — высота,  $AL$  — биссектриса,  $AM$  — медиана. Продолжим биссектрису до пересечения с описанной около треугольника окружностью в точке  $A_1$ . Поскольку  $MA_1 \parallel AD$ , то  $\angle MA_1A = \angle LAD$ . Ответ: если  $\angle A < 90^\circ$ , то угол между медианой и биссектрисой меньше, чем угол между биссектрисой и высотой. Если  $\angle A > 90^\circ$  — наоборот; если  $\angle A = 90^\circ$ , то углы равны.

331. Если  $AD$  — высота,  $AN$  — медиана,  $M$  — точка пересечения медиан, то  $\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{|DB|}{|AD|} + \frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|CB|}{|AD|} \geq \frac{|CB|}{|AN|} = \frac{|CB|}{3|MN|} = \frac{2}{3}$ .

332. Из того, что  $S_{BAM} = S_{BCM}$  и  $|BC| > |BA|$ ,  $|CM| > |MA|$  следует, что  $\sin \angle BAM > \sin \angle BCM$ . Значит, если углы острые, то  $\angle BAM > \angle BCM$ ; тупым же может быть лишь угол  $BAM$ . Таким образом, всегда  $\angle BAM > \angle BCM$ .

333. Если  $|OA| = a$ ,  $R$  — радиус окружности,  $K$  — точка пересечения  $OA$  и  $DE$ , то легко найти, что  $|OK| = a - \frac{a^2 - R^2}{2a} = \frac{a^2 + R^2}{2a} > R$ .

334. Обозначения даны на рис. 60. В первом случае (рис. 60, а)  $|AB| < |AA_1| + |A_1B_1| + |B_1B| = |AA_1| + |A_1C| + |B_1D| + |BB_1| = |AC| + |BD|$ . Во втором случае (рис. 60, б)  $|AB| > |BK| - |AK| > |BE| - |AC|$ . Обратное утверждение легко доказывается от противного.

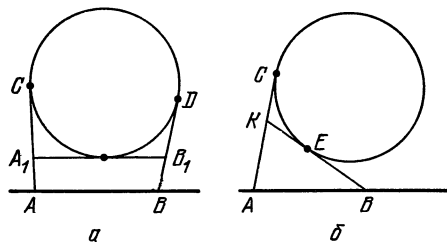


Рис. 60

335. Пусть  $K$ ,  $L$  и  $M$  — точки пересечения проведенных прямых с  $AC$ . Обозначим:  $|AC| = b$ ,  $|BC| = a$ ,  $|AB| = c$ ,  $|BL| = l$ . По теореме о биссектрисе внутреннего угла

найдем:  $|LC| = \frac{ab}{a+c}$ ; применяя еще раз эту теорему для  $\triangle BCL$ ,

найдем:  $|LM| = \frac{ba}{a+c} \cdot \frac{l}{l+a} = \frac{ba}{a+c} \left(1 - \frac{a}{a+l}\right)$ ; но  $\angle BLA = \frac{1}{2} \angle B + \angle C = \frac{\pi - \angle A + \angle C}{2} > \angle A$  (так как  $\angle C > 3 \angle A - \pi$ ).

Значит,  $c > l$  и  $|LM| < \frac{ba}{a+c} \left(1 - \frac{a}{a+c}\right) = b \frac{ac}{(a+c)^2} \leq \frac{b}{4}$ .

336. Пусть  $ABCD$  — данный четырехугольник. Рассмотрим четырехугольник  $AB_1CD$ , где  $B_1$  симметрична  $B$  относительно срединного перпендикуляра к диагонали  $AC$ . Очевидно, площади  $ABCD$  и  $AB_1CD$  равны, стороны  $AB_1CD$  в порядке обхода равны  $b, a, c, d$ . Неравенство  $S \leq \frac{1}{2}(ac + bd)$  для четырехугольника  $AB_1CD$  очевидно. Равенство имеет место, если  $\angle DAB_1 = \angle B_1CD = 90^\circ$ , т. е. четырехугольник  $AB_1CD$  — вписанный, с двумя противоположными углами по  $90^\circ$ ; значит, четырехугольник  $ABCD$  тоже вписан (в ту же окружность) и его диагонали перпендикулярны.

337. Рассмотрим два случая.

1) данный треугольник  $(ABC)$  — остроугольный. Пусть  $\angle B$  — наибольший:  $60^\circ \leq \angle B < 90^\circ$ . Поскольку биссектрисы углов  $A$  и  $C$  меньше 1, то и высоты этих углов  $h_A$  и  $h_C$  меньше 1. Имеем  $S_{ABC} = \frac{h_A h_C}{2 \sin B} < \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

2) Если один из углов треугольника, например  $B$ , не острый, то стороны, его заключающие, меньше соответствующих биссектрис, т. е. меньше 1, а площадь не превосходит  $1/2$ .

**338.** Пусть  $c$  — наибольшая сторона, противолежащая вершине  $C$ . Если  $a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2 > 0$ , то  $a^2 + b^2 > 8R^2 - c^2 \geq c^2$  (так как  $c \leq 2R$ ), т. е. треугольник — остроугольный. Обратно, пусть треугольник — остроугольный; тогда  $a^2 + b^2 + c^2 = 2m_c^2 + \frac{3}{2}c^2$  ( $m_c$  — медиана к стороне  $c$ ); поэтому, чем меньше медиана, тем меньше  $a^2 + b^2 + c^2$ , но медиана максимальна, если  $C$  — середина дуги, и уменьшается при перемещении  $C$  по дуге; когда же треугольник станет прямоугольным, то  $a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2$  будет равно 0.

**339.** Заменив  $R$  и  $r$  по формулам  $R = \frac{abc}{4S}$ ,  $r = \frac{S}{p}$ , воспользуйтесь для  $S$  формулой Герона и равенством

$$4S^2 \left( p - \frac{abc}{2S} - \frac{S}{p} \right) \left( p + \frac{abc}{2S} + \frac{S}{p} \right) = \\ = \frac{1}{8} (a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2).$$

**340.** Допустим противное, например, что  $c \geq a$ ; тогда  $2c \geq c + a > b$ ; возводя неравенства в квадрат и складывая, получаем:  $5c^2 > a^2 + b^2$  — противоречие.

**341.** Биссектриса угла  $B$  является биссектрисой  $\angle OBN$ , а биссектриса угла  $A$  является биссектрисой  $\angle OAN$ . Далее,  $\angle BAN = 90^\circ - \angle B < 90^\circ - \angle A = \angle ABH$ ; значит,  $|AH| > |BH|$ . Если  $K$  и  $M$  — точки пересечения биссектрис углов  $A$  и  $B$  с  $OH$ , то  $\frac{|HK|}{|KO|} = \frac{|AH|}{|AO|} = \frac{|AH|}{R} > \frac{|BH|}{R} = \frac{|BH|}{|OB|} = \frac{|HM|}{|MO|}$ . Таким образом,  $|HK| > |HM|$  и точка пересечения биссектрис углов  $A$  и  $B$  находится внутри  $\triangle BOH$ .

**342.** Обозначим  $|AB| = |BC| = a$ ,  $|AM| = c$ ,  $|MC| = b$ ,  $|MB| = m$ ,  $\angle BMO = \psi$ ,  $\angle MBO = \varphi$ . Нужно доказать, что  $|OB| > |OM|$  или  $\psi > \varphi$ , или  $\cos \psi < \cos \varphi$ . По теореме косинусов для  $\triangle MBA$  и  $\triangle MBC$  получим:

$$\cos \varphi - \cos \psi = \frac{m^2 + a^2 - c^2}{2ma} - \frac{m^2 + b^2 - a^2}{2mb} = \\ = \frac{m^2(b-a) - a(b^2 - a^2) + b(a^2 - c^2)}{2mab};$$

но  $a - c = b - a$ ; значит,

$$\cos \varphi - \cos \psi = \frac{(b-a)(m^2 - ab - a^2 + ab + bc)}{2mab} = \\ = \frac{(b-a)(m^2 - a^2 - b(2a-b))}{2mab} = \frac{(b-a)(m+b-a)(m-a+b)}{2mab} > 0,$$

что и требовалось доказать.

**343.** Проведем через  $M$  прямую, параллельную  $AC$  до пересечения с  $AB$  в точке  $K$ . Легко найдем:  $|AK| = |CM| \cdot \frac{|AB|}{|CB|}$ ,  $|MK| = |MB| \cdot \frac{|AC|}{|CB|}$ . Поскольку  $|AM| \leq |AK| + |KM|$ , то, заменяя  $|AK|$  и  $|KM|$ , получим:

$$|AM| \leq \frac{|CM| \cdot |AB|}{|CB|} + \frac{|MB| \cdot |AC|}{|CB|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (|AM| - |AC|)|BC| \leq (|AB| - |AC|)|MC|,$$

что и требовалось.

**344.** Минимум равен  $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$  и достигается, если  $M$  — центр тяжести  $\triangle ABC$ . (Это можно доказать, например, методом координат или воспользовавшись теоремой Лейбница — см. задачу П.140.)

**345.** «Спрявим» путь шара: для этого вместо того, чтобы «отражать» шар от борта, будем отражать зеркально относительно этого борта сам бильярд. Получим систему лучей с общей вершиной; любые два соседних луча образуют угол  $\alpha$ . Максимальное число лучей системы, которые могут пересечь прямая, и есть максимальное число отражений шара. Это число равно  $\left[ \frac{\pi}{\alpha} \right] + 1$ , если  $\frac{\pi}{\alpha}$  — не целое число

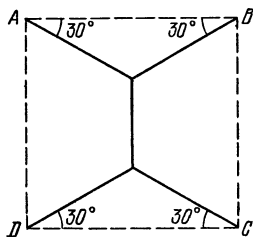


Рис. 61

( $[x]$  — целая часть числа  $x$ ); если же  $\frac{\pi}{\alpha}$  — число целое, то оно равно максимальному числу отражений.

**346.** Если дороги построить так, как показано на рис. 61 ( $A, B, C$  и  $D$  — деревни, дороги — сплошные линии), то их суммарная длина будет  $2 + 2\sqrt{3} < 5,5$ . Можно показать, что указанное расположение дорог реализует минимум их суммарной длины.

**347.** Если одна из сторон треугольника, проходящая через  $A$ , образует угол  $\varphi$  с прямой, перпендикулярной данным параллельным прямым, то другая сторона образует угол  $180^\circ - \varphi - \alpha$ ; найдя эти стороны, получим, что площадь треугольника равна

$$-\frac{ab \sin \alpha}{2 \cos \varphi \cos(\varphi + \alpha)} = -\frac{ab \sin \alpha}{\cos \alpha + \cos(\alpha + 2\varphi)}.$$

Это выражение минимально, если  $\alpha + 2\varphi = 180^\circ$ . Ответ:  $S_{\min} = ab \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ .

**348.** Имеем:  $S_{ACBD} = \frac{|AB|}{|MO|} S_{OCD} = 2(k+1) S_{OCD}$ . Следовательно,  $S_{ACBD}$  будет наибольшей, когда наибольшей будет площадь треугольника  $OCD$ . Но треугольник  $OCD$  — равнобедренный с боковой стороной, равной  $R$ ; значит, его площадь максимальна, когда достигает максимума синус угла при вершине  $O$ . Обозначим этот угол через  $\varphi$ . Очевидно,  $\varphi_0 \leq \varphi < \pi$ , где  $\varphi_0$  соответствует случаю перпендикулярности  $AB$  и  $CD$ . Следовательно, если  $\varphi_0 \leq \pi/2$ , то максимальная площадь

$\triangle OCD$  соответствует значению  $\varphi_1 = \pi/2$ ; если же  $\varphi_0 > \pi/2$ , то значению  $\varphi_1 = \varphi_0$ . Ответ: если  $k \leq \sqrt{2} - 1$ , то  $S_{\max} = (k + 1)R^2$ ; если  $k > \sqrt{2} - 1$ , то  $S_{\max} = 2R^2 \sqrt{k(k+2)}/(k+1)$ .

349. Пусть прямая  $BC$  удовлетворяет условию задачи:  $|BP| = |MC|$  (порядок следования точек:  $B, P, M, C$ ). Докажем, что площадь четырехугольника  $ABNC$  — наименьшая. Проведем другую прямую, пересекающую стороны угла в точках  $B_1$  и  $C_1$ . Пусть точка  $B$  лежит между точками  $A$  и  $B_1$ , тогда точка  $C_1$  лежит между точками  $A$  и  $C$ . Надо доказать, что  $S_{BB_1N} > S_{CC_1N}$ . Это неравенство эквивалентно

неравенству  $S_{BB_1P} > S_{CC_1P}$ , поскольку  $\frac{S_{BB_1P}}{S_{BB_1N}} = \frac{S_{CC_1P}}{S_{CC_1N}} = \frac{|AP|}{|AN|}$ . Прибавим к обеим частям последнего неравенства  $S_{BPC_1}$ . Получим слева

$S_{BB_1P} + S_{BPC_1} = S_{BB_1PC_1} = S_{C_1CB_1}$  (следует из равенства  $|BP| = |MC|$ ), а справа  $S_{CC_1P} + S_{BPC_1} = S_{C_1CB}$ . Но, очевидно,  $S_{C_1CB_1} > S_{C_1CB}$ . Аналогично разбирается случай, когда точка  $B_1$  лежит между точками  $A$  и  $B$ .

Построение. Достаточно провести какую-либо прямую, пересекающую стороны данного угла и прямые  $AN$  и  $AM$  соответственно в точках  $B_0, P_0, M_0$  и  $C_0$  так, что  $|B_0P_0| = |M_0C_0|$ , а затем провести через  $M$  прямую, параллельную  $B_0C_0$ . Рассмотрим параллелограмм  $AB_0DC_0$ ; обозначим через  $K$  и  $L$  точки пересечения прямых  $AP_0$  и  $AM_0$  соответственно с  $B_0D$  и  $C_0D$ . Из равенства  $|B_0P_0| = |M_0C_0|$  следует, что  $S_{AB_0K} = S_{AC_0L}$ . Задача сводится к построению двух равновеликих треугольников  $AB_0K$  и  $AC_0L$ , все углы которых известны. Возьмем  $B_0$  произвольно, построим  $\triangle AB_0K$ . Возьмем на  $AB_0$  точку  $E$  так, что  $\angle B_0KE = \angle ALC_0$ . Построим отрезок  $AC_0$ , равный  $\sqrt{|B_0E| \cdot |B_0A|}$ . Прямая  $B_0C_0$  — искомая. Замечание. Рассмотрим следующую задачу. Через точку  $M$  внутри данного угла провести прямую, пересекающую стороны угла в точках  $B$  и  $C$  таким образом, чтобы отрезок  $BC$  был наименьшим. Из рассмотренной задачи следует, что наименьшим отрезок  $BC$  будет в том случае, когда  $|BP| = |MC|$ , где  $P$  — проекция вершины данного угла на  $BC$ . (Следует даже большее, а именно: если отрезок  $BC$  обладает указанным свойством, то для любой другой прямой, проходящей через  $M$  и пересекающей стороны угла в точках  $B_1$  и  $C_1$ , проекция отрезка  $B_1C_1$  на отрезок  $BC$  будет больше, чем  $|BC|$ .) Построение такого отрезка, однако, не всегда возможно с помощью циркуля и линейки.

350. Пусть  $M_1$  и  $N_1$  — две другие точки на сторонах угла (рис. 62). Тогда  $\angle M_1AN_1 = \beta$ ,  $\angle AM_1M = 360^\circ - \alpha - \beta - \angle ON_1A > 180^\circ - \angle ON_1A = \angle AN_1N$ . Отсюда, учитывая, что  $\angle MAM_1 = \angle NAN_1$ , получим, что  $|M_1A| < |N_1A|$  и, значит,  $S_{M_1AM} < S_{N_1AN}$ ; таким образом,  $S_{OM_1AN_1} < S_{OMAN}$ .

351. Учитывая результат предыдущей задачи, нужно выяснить, при каких условиях можно найти на сторонах угла точки  $M$  и  $N$  такие,

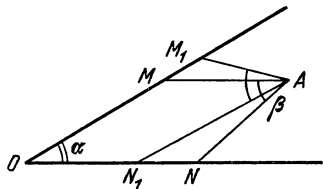


Рис. 62



что  $\angle MAN = \beta$  и  $|MA| = |AN|$ . Опишем около треугольника  $MON$  окружность (рис. 63). Поскольку  $\varphi + \psi + \beta < 180^\circ$ , то точка  $A$  будет вне ее. Если  $L$  — точка пересечения прямой  $OA$  с окружностью, то должны выполняться неравенства  $\angle AMN = 90^\circ - \frac{\beta}{2} > \angle LMN = \angle LON$  и  $\angle ANM = 90^\circ - \frac{\beta}{2} > \angle LOM$ . Таким образом, если  $\varphi < 90^\circ - \frac{\beta}{2}$  и  $\psi < 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ , то можно найти точки  $M$  и  $N$  такие, что  $|MA| = |AN|$  и  $\angle MAN = \beta$ . Если же условия не выполняются, то таких точек найти нельзя. В этом случае четырехугольник максимальной площади вырождается в треугольник (одна из точек  $M$  или  $N$  совпадает с  $O$ ).

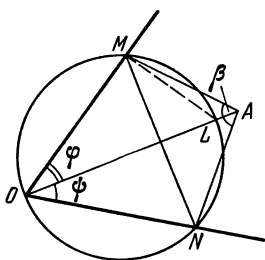


Рис. 63

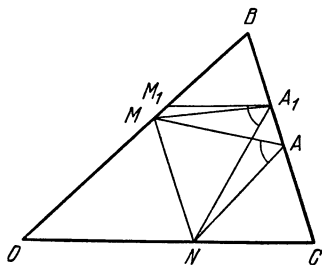


Рис. 64

**352.** Возьмем точку  $A_1$  на  $BC$  (рис. 64). Четырехугольник  $OMA_1N$  равновелик четырехугольнику  $OMAN$ ,  $\angle MA_1N < \angle MAN$ ; следовательно, если взять точку  $M_1$  на  $OB$  так, что  $\angle M_1A_1N = \angle MAN$ , то  $S_{OM_1A_1N} > S_{OMAN}$ ; значит, площадь четырехугольника  $OMAN$  меньше площади максимального четырехугольника, соответствующего точке  $A_1$ , что с учетом результатов двух предыдущих задач доказывает утверждение.

**353.** Пусть для определенности  $\sin \alpha \geq \sin \beta$ ; возьмем на продолжении  $AB$  точку  $K$  так, что  $\angle BKC = \beta$ ; так как  $\angle CBK = \angle ADC$  (поскольку четырехугольник  $ABCD$  — вписанный), то  $\triangle KBC$  подобен  $\triangle ACD$ . Но  $|BC| \geq |CD|$ , следовательно,  $S_{BCK} \geq S_{ADC}$  и  $S_{AKC} \geq S_{ABCD}$ . Но  $S_{AKC} = \frac{a^2 \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha}{2 \sin \beta}$ , значит,  $S_{ABCD} \leq \frac{a^2 \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha}{2 \sin \beta}$ . Аналогично доказывается, что  $S_{ABCD} \geq \frac{a^2 \sin(\alpha + \beta) \sin \beta}{2 \sin \alpha}$ .

**354.** Рассмотрите другое положение точек  $M_1$  и  $N_1$  ( $\angle M_1AN_1 = \beta$ ) и покажите, учитывая условие  $\alpha + \beta > 180^\circ$ , что «добавившийся» треугольник имеет большую площадь, чем треугольник, на который площадь уменьшается (аналогично решению задачи II.350).

**355.** Учитывая результат предыдущей задачи и рассуждая точно так же, как в задаче II.351, получим, что если  $\varphi > 90^\circ - \frac{\beta}{2}$  и  $\psi > 90^\circ -$

$-\frac{\beta}{2}$ , то четырехугольник наименьшей площади существует и для него  $|MA| = |AN|$ . Если же это условие не выполняется, то искомый четырехугольник вырождается (одна из точек  $M$  или  $N$  совпадает с вершиной  $O$ .)

**356.** Возьмем точку  $A$ , для которой выполняются условия задачи, и какую-то другую точку  $A_1$ . Проведя через  $A_1$  прямые, параллельные  $AM$  и  $AN$  и пересекающие стороны в точках  $M_1$  и  $N_1$ , убедимся, что  $S_{OM_1A_1N_1} < S_{OMAN}$  и, следовательно, тем более площадь минимального четырехугольника, соответствующего точке  $A_1$ , меньше площади четырехугольника  $OMAN$  — минимального четырехугольника, соответствующего точке  $A$ .

**357.** Радиус наибольшего круга равен радиусу окружности, описанной около правильного треугольника со стороной  $2R$ , т. е.  $2R/\sqrt{3}$ . (Возьмем такой треугольник и на его сторонах как на диаметрах построим окружности.) Для любой окружности большего радиуса, если бы она была покрыта данными кругами, нашлась бы дуга не меньше, чем в  $120^\circ$ , покрытая одним кругом, но такая дуга содержит хорду больше  $2R$  — противоречие.

В общем случае, если существует остроугольный треугольник со сторонами  $2R_1, 2R_2, 2R_3$ , то радиус описанной около него окружности и будет искомым. Во всех остальных случаях радиус наибольшего круга равен наибольшему из чисел  $R_1, R_2, R_3$ .

**358.** Можно. На рис. 65 показаны три единичных квадрата, покрывающие квадрат со стороной  $5/4$ .

**359.** Заметим сначала, что сторона наименьшего правильного треугольника, покрывающего ромб со стороной  $a$  и острым углом  $60^\circ$ , равна  $2a$ . В самом деле, если вершины острых углов  $M$  и  $N$  ромба находятся на сторонах  $AB$  и  $BC$  правильного треугольника  $ABC$  и  $\angle BNM = \alpha$ ,  $30^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ , то, найдя  $|BN|$  по теореме

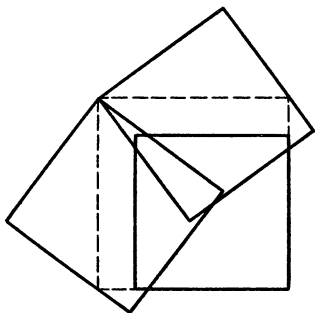


Рис. 65

синусов из  $\triangle BNM$  и  $|CN|$  по теореме синусов из  $\triangle KNC$  ( $K$  — вершина тупого угла ромба, которая, можно считать, расположена на стороне  $AC$ ), получим после преобразований:  $|BC| = 2a \frac{\cos(60^\circ - \alpha)}{\cos 30^\circ}$ ;

учитывая, что  $30^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ , найдем, что  $|BC| \geq 2a$ . Легко видеть, что правильный треугольник со стороной  $3/2$  можно покрыть тремя правильными треугольниками со стороной 1. Для этого каждый единичный треугольник положим так, чтобы одна его вершина совместилась с одной из вершин покрываемого треугольника, а середина противоположной стороны совпала бы с центром покрываемого треугольника.

Покажем теперь, что правильный треугольник со стороной  $b > 3/2$  нельзя покрыть тремя правильными единичными треугольниками. Если бы такое покрытие было возможно, то вершины  $A, B$  и  $C$  были бы

покрыты разными треугольниками, а каждая из сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  покрывалась бы двумя треугольниками. Пусть  $A$  принадлежит треугольнику  $I$ ,  $B$  —  $II$ ,  $C$  —  $III$ , центр  $O$  треугольника принадлежит, например, треугольнику  $I$ . Возьмем на  $AB$  и  $AC$  точки  $M$  и  $N$  так, что  $|AM| = |AN| = \frac{1}{3}b$ . Поскольку  $|BM| = |CN| = \frac{2}{3}b > 1$ , то точки  $M$  и  $N$  также принадлежат треугольнику  $I$  и, следовательно, ромб  $AMON$  целиком покрыт треугольником, сторона которого меньше  $2|AM|$  ( $2|AM| > 1$ ), что невозможно.

**360.** Обозначим отношения  $\frac{|AM|}{|MC|}$ ,  $\frac{|CN|}{|NB|}$  и  $\frac{|ML|}{|LM|}$  через  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Тогда (см. решение задачи I.221)  $P = Q\alpha\beta\gamma$ ,  $S = Q(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$ . Затем воспользуемся неравенством  $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) \geq (\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}+1)^3$ .

**361.** Пусть  $\operatorname{ctg} \alpha = x$ ,  $\operatorname{ctg} \beta = y$ , тогда  $\operatorname{ctg} \gamma = \frac{-xy+1}{x+y} = \frac{x^2+1}{x+y} - x$ ,  
 $a^2 \operatorname{ctg} \alpha + b^2 \operatorname{ctg} \beta + c^2 \operatorname{ctg} \gamma = (a^2 - b^2 - c^2)x + b^2(x+y) + c^2 \frac{x^2+1}{x+y}$ . Ми-

нимум выражения  $b^2(x+y) + c^2 \frac{x^2+1}{x+y}$  при фиксированном  $x$  и  $x+y > 0$  достигается при таком  $y$ , для которого выполняется равенство  $b^2(x+y) = c^2 \frac{x^2+1}{x+y} \Rightarrow \frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{c}{b}$ . Таким образом,  $\frac{c}{b} = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$ . Значит, наименьшее значение данного в условии выражения

достигается для таких  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , синусы которых пропорциональны сторонам  $a$ ,  $b$  и  $c$ , т. е. когда рассматриваемые треугольники подобны. Но в этом случае имеет место равенство (легко проверить).

**362.** Обозначим:  $p-a=x$ ,  $p-b=y$ ,  $p-c=z$  ( $p$  — полупериметр). Оставив в правой части неравенства  $4S\sqrt{3}$ , получим после преобразования левой части (например,  $a^2 - (b-c)^2 = 4(p-b)(p-c) = 4yz$ ) и замены  $S$  по формуле Герона неравенство  $xy+yz+zx \geq \sqrt{3}(x+y+z)xyz$ . Разделив обе части неравенства на  $\sqrt{xyz}$  и сделав замену  $u = \sqrt{(xy)/z}$ ,  $v = \sqrt{(yz)/x}$ ,  $w = \sqrt{(zx)/y}$  ( $x = uw$ ,  $y = vu$ ,  $z = vw$ ), получим неравенство  $u+v+w \geq \sqrt{3}(uv+vw+wu)$ , которое после возведения в квадрат приводится к известному неравенству  $u^2+v^2+w^2 \geq uv+vw+wu$ .

**363.** Существуют два семейства правильных треугольников, описанных около данного треугольника (см. задачу II.305). Построим на сторонах треугольника  $ABC$  во внешнюю сторону правильные треугольники  $ABC_1$ ,  $BCA_1$ ,  $CAB_1$  и опишем около них окружности. Вершины треугольников первого семейства расположены по одной на этих окружностях. Пусть  $O_1O_2O_3$  — центры этих окружностей ( $\triangle O_1O_2O_3$  — правильный, см. задачу II.304). Наибольшую площадь будет иметь треугольник, стороны которого параллельны сторонам треугольника  $O_1O_2O_3$  (секущая, проходящая через точку пересечения двух окружностей, имеет наибольшую длину, когда она параллельна

линии центров, в этом случае ее длина в два раза больше расстояния между центрами). Площадь наибольшего треугольника будет

$$S_0 = 4S_{O_1 O_2 O_3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2S\sqrt{3} \right), \text{ где } S - \text{площадь данного}$$

треугольника (см. решение задачи II.305). Для треугольников второго семейства площадь наибольшего будет меньше. Среди правильных треугольников, вписанных в данный, наименьшую площадь будет иметь тот, стороны которого параллельны сторонам наибольшего описанного. Это следует из результата задачи I.241. Его площадь равна  $S_1 = S^2/S_0$ . Таким образом, площадь наибольшего описанного пра-

$$\text{вильного треугольника равна } S_0 = \frac{\sqrt{3}(a^2 + b^2 + c^2)}{6} + 2S, \text{ а наименьше-}$$

$$\text{го вписанного} - S_1 = \frac{S^2}{S_0}, \text{ где } S - \text{площадь данного треугольника.}$$

**364.** Опишем около треугольника  $AMC$  окружность. Все треуголь-

ники  $A_1MC$ , получающиеся при перемещении  $M$  по дуге  $AC$ , подобны между собой, следовательно, отношение  $\frac{|CM|}{|A_1M|}$  будет для них одним

$$\text{и тем же. Поэтому, если } M - \text{точка минимума выражения } f(M) = \frac{|BM| \cdot |CM|}{|A_1M|}, \text{ то } BM \text{ должна проходить через центр окружности,}$$

описанной около треугольника  $AMC$ , иначе можно уменьшить  $|BM|$ , оставляя постоянным отношение  $\frac{|CM|}{|A_1M|}$ . Пусть теперь  $B_1$  и  $C_1$  -

точки пересечения прямых  $BM$  и  $CM$  с окружностью, описанной около треугольника  $ABC$ , тогда  $\frac{|BM| \cdot |CM|}{|A_1M|} = \frac{|CM| \cdot |AM|}{|B_1M|} =$

$$= \frac{|AM| \cdot |BM|}{|C_1M|}. \text{ Следовательно, прямые } AM \text{ и } CM \text{ также должны про-}$$

ходить через центры окружностей, описанных около треугольников  $BMC$  и  $AMB$  соответственно. Таким образом, точка  $M$  - центр вписанной окружности (см. задачу II.125). Кроме того, в этом случае  $A_1$  - центр окружности, описанной около треугольника  $CMB$ ,

$$\sin \angle MBC = \frac{r}{|MB|}, \quad \frac{|CM|}{\sin \angle MBC} = 2|A_1M|; \text{ значит, } \frac{|BM| \cdot |CM|}{|A_1M|} = 2r.$$

Вернемся к вопросу о достижении наименьшего значения функций  $f(M)$ . Известная теорема анализа утверждает, что функция, непрерывная на замкнутом множестве, достигает своего наибольшего и наименьшего значения. В частности, эта теорема верна для функции двух переменных, определенной на многоугольнике. Однако к этой задаче теорема непосредственно не применима - функция  $f(M)$  не определена в вершинах треугольника  $ABC$ . Если же отрезать от треугольника уголки, то получим шестиугольник, на котором  $f(M)$  уже будет непрерывной функцией и, следовательно, будет иметь наименьшее значение. Можно доказать, что вблизи границы треугольника  $f(M) > 2r$ . Поэтому, если отрезаемые уголки достаточно малы, наименьшее значение  $f(M)$  на шестиугольниках, а значит, и на треугольнике, дости-

гается, когда  $M$  — центр вписанной окружности, это наименьшее значение равно  $2r$ . С другой стороны, наибольшего значения  $f(M)$  не принимает, хотя и является ограниченной. Докажите, что  $f(M) < l$ , где  $l$  — длина наибольшей стороны треугольника  $ABC$ , для всех точек треугольника, исключая вершины, и  $f(M)$  может принимать значения, сколь угодно близкие к  $l$ .

**365.** Возьмем на лучах  $MB$  и  $MC$  соответственно точки  $C_1$  и  $B_1$  так, что  $|MC_1| = |MC|$ ,  $|MB_1| = |MB|$  ( $\triangle MC_1B_1$  симметричен  $\triangle MBC$  относительно биссектрисы угла  $BMC$ ),  $C_2$  и  $B_2$  — соответственно проекции  $C_1$  и  $B_1$  на прямую  $AM$ . Имеем:  $|BM|\sin \angle AMC + |CM|\sin \angle AMB = |B_1M|\sin \angle AMC + |C_1M|\sin \angle AMB = |B_1B_2| + |C_1C_2| \geq |B_1C_1| = a$ . Записав еще два таких же неравенства и сложив их, докажем утверждение задачи. Нетрудно проверить, что если  $M$  совпадает с центром вписанной окружности, то неравенство обращается в равенство.

**366. а)** Решим сначала следующую задачу. Пусть  $M$  — точка на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$ , расстояния от  $M$  до сторон  $BC$  и  $AC$  равны соответственно  $u$  и  $v$ ,  $h_1$  и  $h_2$  — высоты, опущенные соответственно на  $BC$  и  $AC$ . Доказать, что выражение  $\frac{h_1}{u} + \frac{h_2}{v}$  достигает наименьшего значения, когда  $M$  — середина  $AB$ . Обозначим, как обычно,  $|BC| = a$ ,  $|AC| = b$ ,  $S$  — площадь  $\triangle ABC$ . Имеем:  $au + bv = 2S$ ,  $v = \frac{2S - au}{b}$ . Подставим  $v$  в выражение  $\frac{h_1}{u} + \frac{h_2}{v} = t$ , получим:  $atu^2 - 2Stu + 2h_1S = 0$ . Дискриминант этого уравнения неотрицателен,  $S^2(t^2 - 4t) \geq 0$ , откуда  $t \geq 4$ . Наименьшее значение  $t = 4$  достигается при  $u = S/a = h_1/2$ ,  $v = h_2/2$ . Из этой задачи следует, что наименьшее значение левой части неравенства пункта а) достигается, когда  $M$  — точка пересечения медиан. Аналогично доказываются неравенства пунктов б) и в). В пункте б) надо определить, для какой точки  $M$  на стороне  $AB$  достигается наибольшего значения произведение  $uw$ . В пункте в) предварительно разделим обе части неравенства на  $uvw$  и решим задачу о минимуме функции  $(h_1/u - 1)(h_2/v - 1)$  для точки  $M$  на  $AB$ .

**367.** Пусть для остроугольного треугольника  $ABC$  выполняется неравенство  $|AC| \leq |AB| \leq |BC|$ ;  $BD$  — высота,  $O$  — центр описанной,  $I$  — центр вписанной окружностей  $\triangle ABC$ ,  $E$  — проекция  $I$  на  $BD$ . Поскольку  $|ED| = r$ , то надо доказать, что  $|BE| \geq R = |BO|$ . Но  $BI$  — биссектриса угла  $EBO$  ( $BI$  — биссектриса угла  $ABC$  и  $\angle ABD = \angle OBC$ ),  $\angle BEI = 90^\circ$ ,  $\angle BOI \geq 90^\circ$  (последнее следует из того, что проекция  $CI$  на  $BC$  не превосходит  $|BC|/2$ ). Следовательно,  $|BE| \geq |BO|$  (отобразим  $BO$  симметрично относительно  $BI$ ).

**368.** Поскольку площадь треугольника, составленного из медиан другого треугольника, составляет  $3/4$  площади исходного треугольника, а для любого треугольника  $abc = 4RS$ , то надо доказать, что для остроугольного треугольника справедливо неравенство

$$m_a m_b m_c > \frac{5}{8} abc. \quad (1)$$

Пусть, для удобства вычислений, одна из сторон равна  $2d$ , а медиана

к этой стороне равна  $m$ . Поскольку треугольник остроугольный, то  $m > d$ . Обозначим через  $t$  косинус острого угла, образованного этой медианой со стороной  $2d$ ,  $0 \leq t < d/m$  ( $t < d/m$  — условие остроугольности треугольника). Выражая стороны и медианы через  $d$ ,  $m$  и  $t$  и подставляя найденные выражения в неравенство (1), получим после преобразований:  $m^2(9d^2 + m^2)^2 - 25d^2(d^2 + m^2)^2 > t^2 d^2 m^2 (64m^2 - 100d^2)$ . Левая часть неравенства приводится к виду  $(m^2 - 4dm + 5d^2)(m^2 + 4dm + 5d^2)(m^2 - d^2)$ . При  $m > d$  это выражение положительно. Кроме того, если  $m = d$  (треугольник прямоугольный), то левая часть неравенства не меньше правой (равенство при  $t = 0$ ). Далее, если  $d < m \leq \frac{5}{4}d$ , то правая часть неравенства неположительна и неравенство справедливо.

Пусть  $m > \frac{5}{4}d$ . В этом случае правая часть неравенства меньше, чем значение, получающееся при  $t = d/m$ . Но при  $t = d/m$  исходный треугольник прямоугольный, а для прямоугольных треугольников уже доказана справедливость нестрогого неравенства. (Достаточно повторить те же рассуждения относительно другой стороны треугольника.) Таким образом, доказано, что для любых нетупоугольных треугольников за исключением равнобедренных прямоугольных справедливо неравенство (1); для равнобедренных прямоугольных треугольников имеет место равенство.

**369.** Пусть  $M$  лежат внутри  $ABC$  на расстояниях  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно до сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . Задача состоит в том, чтобы найти минимум  $x^2 + y^2 + z^2$  при условии  $ax + by + cz = 2S_{ABC}$ . Очевидно, что этот минимум достигается при тех же значениях  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , что и минимум  $x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda(ax + by + cz) = (x - \lambda a)^2 + (y - \lambda b)^2 + (z - \lambda c)^2 - \lambda^2(a^2 + b^2 + c^2)$ , где  $\lambda$  — произвольное фиксированное число (при том же условии  $ax + by + cz = 2S_{ABC}$ ). Взяв  $\lambda = \frac{2S_{ABC}}{a^2 + b^2 + c^2}$  ( $\lambda$  находится из

уравнений  $x = \lambda a$ ,  $y = \lambda b$ ,  $z = \lambda c$ ,  $ax + by + cz = 2S_{ABC}$ ), видим, что минимум последнего выражения будет достигаться при  $x = \lambda a$ ,  $y = \lambda b$ ,  $z = \lambda c$ . Пусть теперь точка  $M$  удалена от  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  на расстояния соответственно  $\lambda a$ ,  $\lambda b$  и  $\lambda c$ , а точка  $M_1$  — симметрична  $M$  относительно биссектрисы угла  $A$ . Поскольку  $S_{AM_1C} = S_{AMB}$ , то  $M_1$  лежит на медиане угла  $A$ , а это значит, что  $M$  лежит на симедиане этого угла (см. задачу II.171).

**370.** Пусть  $M$  — точка внутри треугольника  $ABC$ , все углы которого меньше  $120^\circ$ . Повернем  $\triangle AMC$  вокруг точки  $A$  на угол  $60^\circ$  во внешнюю по отношению к  $\triangle ABC$  сторону. При этом точка  $C$  перейдет в точку  $C_1$ , точка  $M$  — в точку  $M_1$ . Сумма  $|AM| + |BM| + |CM|$  равна ломаной  $BMM_1C_1$ . Наименьшей эта ломаная будет, когда точки  $M$  и  $M_1$  лежат на отрезке  $BC_1$ . Отсюда следует утверждение задачи.

**371.** Пусть  $ABC$  — данный остроугольный треугольник,  $A_1$  — точка на стороне  $BC$ ,  $B_1$  — на  $CA$ ,  $C_1$  — на  $AB$ ,  $A_2$  и  $A_3$  — точки, симметричные  $A_1$  относительно сторон  $AB$  и  $AC$  (соответственно). Ломаная  $A_2C_1B_1A_3$  равна периметру треугольника  $A_1B_1C_1$ ; следовательно, этот периметр при фиксированной точке  $A_1$  будет наименьшим, когда точки  $C_1$  и  $B_1$  лежат на отрезке  $A_2A_3$ , и будет равен  $|A_2A_3|$ . Но

$\triangle AA_2A_3$  — равнобедренный,  $\angle A_2AA_3 = 2\angle BAC$ ,  $|A_2A| = |A_3A| = |AA_1|$ . Значит,  $|A_2A_3|$  будет наименьшим, если  $AA_1$  — высота  $\triangle BAC$ . Точно так же высотами должны являться и  $BB_1$  и  $CC_1$ .

**372.** Если все углы треугольника меньше  $120^\circ$ , то наименьшее значение сумма расстояний будет принимать для точки, из которой стороны видны под углом  $120^\circ$  (см. задачу П.370). Эта сумма равна  $|BC_1|$  (обозначения задачи П.370). Квадрат этой суммы равен  $a^2 + b^2 -$

$-2ab \cos(\angle C + 60^\circ) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2S\sqrt{3}$ . Но из задачи П.362 следует, что  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$ . Осталось доказать неравенство  $S \geq 3\sqrt{3}r^2$ . Это неравенство доказывается достаточно просто; оно выражает тот факт, что наименьшую площадь среди всех описанных около данной окружности треугольников имеет правильный треугольник (для него выполнено равенство). Для завершения доказательства необходимо проверить неравенство  $a + b \geq 6r$ , поскольку для треугольника с углом, большим  $120^\circ$ , наименьшее значение сумма расстояний до вершин достигается в вершине тупого угла.

**373.** Докажем правую часть неравенства. Пусть для определенности  $b \geq c$ .

1) Если  $a \leq b$ , то  $2p = a + b + c = (b - a) + c + 2a < 2c + 2a \leq 2\frac{b}{a}c + 2a = 2\frac{bc + a^2}{a}$ .

2) Если  $a \geq b \geq c$ , то  $a < 2b$  и  $2p = a + b + c = (b + c - a) + 2a \leq c + 2a < \frac{2bc}{a} + 2a = 2\frac{bc + a^2}{a}$ .

Левая часть неравенства следует из правой части и тождества  $(b + c)(p - a) - bc \cos A = a\left(\frac{bc + a^2}{a} - p\right)$ .

**374.** Имеем:  $\frac{|BN|}{|NC|} = \frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|AL|}{|LD|} = \frac{|BK|}{|KD|}$ , т. е.  $KN$  параллельна  $CD$ , четырехугольник  $KLMN$  — параллелограмм. Пусть  $|AK| = a$ ,  $|KC| = b$ ,  $|BK| = x$ ,  $|KD| = y$ ,  $\frac{x}{y} \geq \frac{a}{b}$ ; тогда

$$\begin{aligned} S_{KLM} &= S_{ALM} - S_{AKL} = \left(\frac{x}{x+y}\right)^2 S_{ADC} - \frac{x}{x+y} \cdot \frac{a}{a+b} S_{ADC} = \\ &= \frac{x}{x+y} \left(\frac{x}{x+y} - \frac{a}{a+b}\right) \frac{y}{y+x} S_{ABCD} < \frac{x^2 y}{(x+y)^3} S_{ABCD}. \end{aligned}$$

Обозначим:  $y/x = t$ . Нетрудно доказать, что наибольшее значение функции  $t/(1+t)^3$  достигается при  $t = 1/2$  (например, взяв производную от этой функции) и равно  $4/27$ . Таким образом,  $S_{KLMN} = 2S_{KLM} < \frac{8}{27} S_{ABCD}$ .

**375.** Обозначим стороны  $\triangle ABC$ , как обычно:  $a$ ,  $b$  и  $c$ ,  $I$  — центр вписанной окружности. Справедливо следующее векторное равенство (оно следует из свойства биссектрисы, см. задачу I.9):

$$\vec{IA} \cdot a + \vec{IB} \cdot b + \vec{IC} \cdot c = 0. \quad (1)$$

Кроме того,  $|IB| < c$ ,  $|IC| < b$ . Эти неравенства следуют из того, что углы  $AIB$  и  $AIC$  — тупые. Возьмем точку  $A_1$  достаточно близкую к точке  $A$  так, чтобы по-прежнему выполнялись неравенства  $|I_1B| < c$ ,  $|I_1C| < b$ , где  $I_1$  — центр вписанной в  $\triangle A_1BC$  окружности. Стороны  $\triangle A_1BC$  равны  $a$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ . Как и для  $\triangle ABC$  запишем равенство

$$\overrightarrow{I_1A_1} \cdot a + \overrightarrow{I_1B} \cdot b_1 + \overrightarrow{I_1C} \cdot c_1 = 0. \quad (2)$$

Вычтем (1) из (2):

$$a(\overrightarrow{I_1A_1} - \overrightarrow{IA}) + \overrightarrow{I_1B} \cdot b_1 - \overrightarrow{IB} \cdot b + \overrightarrow{I_1C} \cdot c_1 - \overrightarrow{IC} \cdot c = 0. \quad (3)$$

Заметим, что

$$\overrightarrow{I_1A_1} - \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{I_1I} + \overrightarrow{AA_1}, \quad (4)$$

$$\overrightarrow{I_1B} \cdot b_1 - \overrightarrow{IB} \cdot b = \overrightarrow{I_1B}(b_1 - b) + \overrightarrow{I_1I} \cdot b, \quad (5)$$

$$\overrightarrow{I_1C} \cdot c_1 - \overrightarrow{IC} \cdot c = \overrightarrow{I_1C}(c_1 - c) + \overrightarrow{I_1I} \cdot c. \quad (6)$$

Заменяя в (3) соответствующие разности по формулам (4), (5), (6), получим:

$$\overrightarrow{I_1I}(a + b + c) + \overrightarrow{AA_1} \cdot a + \overrightarrow{I_1B}(b_1 - b) + \overrightarrow{I_1C}(c_1 - c) = 0.$$

Поскольку  $|\overrightarrow{I_1B}| < c$ ,  $|\overrightarrow{I_1C}| < b$ ,  $|b_1 - b| < |AA_1|$ ,  $|c_1 - c| < |AA_1|$ , то  $|\overrightarrow{I_1I}| = \frac{1}{a+b+c} |\overrightarrow{AA_1} \cdot a + \overrightarrow{I_1B}(b_1 - b) + \overrightarrow{I_1C}(c_1 - c)| < |AA_1| \cdot \frac{a+b+c}{a+b+c} = |AA_1|$ . Из этого можно вывести утверждение задачи для любого положения  $A_1$ . **З а м е ч а н и е.** По существу было продифференцировано равенство (1) и доказано, что  $|V_A| > |V_I|$ , где  $V_A$  и  $V_I$  — скорости, с которыми перемещаются точки  $A$  и  $I$ .

**376.** Опишем около треугольников  $ABF$ ,  $BCD$  и  $CAE$  окружности. Они имеют общую точку  $M$ . Поскольку углы треугольника  $DEF$  постоянны,  $\angle D = \gamma$ ,  $\angle E = \alpha$ ,  $\angle F = \beta$ , то построенные окружности и точка  $M$  не зависят от  $\varphi$ . Сторона  $DF$  (а, следовательно, и  $EF$  и  $ED$ ) будет наибольшей, когда  $DF$  перпендикулярна  $BM$ . Пусть  $\varphi_0$  — угол, соответствующий этому положению. Тогда  $\angle MBC = \angle MCA = \angle MAB = 90^\circ - \varphi_0$ . Продолжим  $CM$  до пересечения с окружностью, описанной около треугольника  $AMB$ , в точке  $F_1$ . Можно найти, что  $\angle F_1BA = \alpha$ ,  $\angle F_1AB = \beta$ ;  $F_1B$  оказывается параллельной  $AC$ . Опустим из  $F_1$  и  $B$  перпендикуляры  $F_1N$  и  $BL$  на  $AC$ . Поскольку  $|F_1N| = |BL|$ , то  $\operatorname{tg} \varphi_0 = \operatorname{ctg}(90^\circ - \varphi_0) = \frac{|CN|}{|F_1N|} = \frac{|AN|}{|F_1N|} + \frac{|AL|}{|BL|} + \frac{|CL|}{|BL|} = \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma$ . Таким образом,  $\operatorname{tg} \varphi_0 = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma$ . **З а м е ч а н и е.** Угол  $\omega = 90^\circ - \varphi_0$  называется *углом Брокера*, а точка  $M$  — *точкой Брокера*. Для каждого треугольника существует две точки Брокера. Положение второй точки  $M_1$  определяется условием  $\angle M_1BA = \angle M_1AC = \angle M_1CB$ .

**377.** Положим:  $\frac{|AC_1|}{|AB|} = x$ ,  $\frac{|BA_1|}{|BC|} = y$ ,  $\frac{|CB_1|}{|CA|} = z$ . Будем считать, что  $x \leq 1/2$ . Если предположить, что площади треугольников  $AB_1C_1$ ,  $BC_1A_1$  и  $CA_1B_1$  больше площади треугольника  $A_1B_1C_1$ , то  $z \leq 1/2$  (иначе  $S_{AC_1B_1} \leq S_{A_1C_1B_1}$ ) и  $y \leq 1/2$ . Площади всех рассматриваемых тре-



угольников легко выражаются через  $S_{ABC}$  и  $x, y, z$ , например:  $S_{AB_1C_1} = x(1-z)S_{ABC}$ . Неравенство  $S_{A_1B_1C_1} < S_{AB_1C_1}$  приведет к виду  $1 - x(1-z) - y(1-x) - z(1-y) < x(1-z)$ . Сложив три таких неравенства, получим:  $3 - 4x(1-z) - 4y(1-x) - 4z(1-y) < 0$ . Поскольку последнее неравенство линейно относительно  $x, y, z$ , то, если бы оно выполнялось при некоторых  $x, y, z$  между 0 и  $1/2$ , то оно должно было бы выполняться и при каком-либо наборе крайних значений переменных, т. е. когда каждое переменное равно 0 или  $1/2$ . Но можно проверить, что это не так. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

**378.** Пусть  $Q$  — середина  $OH$ ,  $Q$  — центр окружности девяти точек (см. задачу II.160). Имеем:  $|OH|^2 + 4|QI|^2 = 2|OI|^2 + 2|HI|^2$ . Так как  $|QI| = R/2 - r$  (на основании теоремы Фейербаха, задача II.287),  $|OI|^2 = R^2 - 2Rr$  (формула Эйлера, задача II.193), то учитывая, что  $R \geq 2r$ , получим:

$$|OH|^2 = 2|HI|^2 + R^2 - 4r^2 \geq 2|HI|^2.$$

**379.** Изящную идею доказательства неравенств подобного типа предложил Казаринов (Kazarinoff, Michigan Mathematical Journal, 1957, № 2, pp. 97–98). Суть ее состоит в следующем. Возьмем на лучах  $AB$  и  $AC$  по точке  $B_1$  и  $C_1$  соответственно. Очевидно, что сумма площадей параллелограммов, построенных на  $AB_1$  и  $AM$  и на  $AC_1$  и  $AM$ , равна площади параллелограмма, одна сторона которого  $B_1C_1$ , а другая параллельна  $AM$  и равна  $|AM|$  (см. также задачу II.40). Следовательно,

$$|AC_1|v + |AB_1|w \leq |B_1C_1|x. \quad (1)$$

а) Возьмем точки  $B_1$  и  $C_1$  совпадающими с точками  $B$  и  $C$ ; тогда неравенство (1) даст неравенство  $bv + cw \leq ax$ . Сложив три таких неравенства, получим требуемое.

б) Если  $|AB_1| = |AC|$ ,  $|AC_1| = |AB|$ , тогда неравенство (1) даст неравенство  $cv + bw \leq ax$ , или  $x \geq \frac{c}{a}v + \frac{b}{a}w$ . Сложив три таких неравенства, получим:

$$x + y + z \geq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)u + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)v + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)w \geq 2(u + v + w).$$

в) В пункте а) было доказано неравенство  $ax \geq bv + cw$ , откуда  $xu \geq \frac{b}{a}uv + \frac{c}{a}wu$ . Точно так же  $yv \geq \frac{a}{b}uv + \frac{c}{b}vw$ ,  $zw \geq \frac{a}{c}uw + \frac{b}{c}vw$ . Сложив эти три неравенства, получим

$$xu + yv + zw \geq \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)uv + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)vw + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right>wu \geq 2(uv + vw + wu).$$

г) Обозначим через  $A_1, B_1, C_1$  проекции точки  $M$  соответственно на стороны  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$ . Возьмем на лучах  $MA, MA_1, MB, MB_1, MC, MC_1$  соответственно точки  $A', A'_1, B', B'_1, C', C'_1$  так, что  $|MA||MA'| = |MA_1||MA'_1| = |MB||MB'| = |MB_1||MB'_1| =$

$= |MC| \cdot |MC'| = |MC_1| \cdot |MC'_1| = d^2$  \*). Можно доказать, что точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  лежат соответственно на прямых  $B'_1C_1$ ,  $C'_1A'_1$ ,  $A'_1B'_1$ , причем  $MA'$ ,  $MB'$ ,  $MC'$  соответственно перпендикулярны этим прямым. Таким образом, в  $\triangle A'_1B'_1C'_1$  расстояния от  $M$  до вершин равны  $\frac{d^2}{u}$ ,  $\frac{d^2}{v}$ ,  $\frac{d^2}{w}$ ,

а до противоположных сторон —  $\frac{d^2}{x}$ ,  $\frac{d^2}{y}$ ,  $\frac{d^2}{z}$ . Применяя неравенство пункта б), получим требуемое неравенство.

д) Возьмем в неравенстве (1)  $b_1 = c_1 = l$ ; тогда  $a_1 = 2l \sin \frac{A}{2}$ . Будем иметь  $x \geq \frac{1}{2 \sin \frac{A}{2}}(u+v)$ . Получив аналогичные неравенства для  $y$  и  $z$  и перемножив их, получим:

$$xyz \geq \frac{1}{8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}(u+v)(v+w)(w+u) = \frac{R}{2r}(u+v)(v+w)(w+u).$$

(равенство  $\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$  было доказано в процессе решения задачи I.240).

е) Из неравенства предыдущего пункта следует:  $xyz \geq \frac{R}{2r} 2\sqrt{uv} \cdot 2\sqrt{vw} \cdot 2\sqrt{wu} = \frac{4R}{r} uvw$ .

ж) Поделив друг на друга неравенства пунктов г) и е), получим доказываемое неравенство.

**З а м е ч а н и е.** В неравенстве пункта а) равенство достигается для любого остроугольного треугольника, когда  $M$  совпадает с точкой пересечения высот треугольника. В пунктах б), в), г) и ж) равенство достигается для равностороннего треугольника, когда  $M$  — центр этого треугольника. В пунктах д) и е) равенство достигается в любом треугольнике, когда  $M$  — центр вписанной окружности.

**380.** Рассмотрим класс подобных между собой треугольников. В качестве представителя этого класса выберем такой треугольник  $ABC$ , в котором  $|AB| = v$ ,  $|BC| = u$ ,  $|AC| = 1$ , причем  $u \leq v \leq 1$ . Таким образом, каждому классу подобных между собой треугольников будет соответствовать точка  $B$  внутри криволинейного треугольника  $CDE$ , где  $D$  — середина  $AC$ , дуга  $EC$  есть дуга окружности с центром в точке  $A$  и радиусом 1,  $ED \perp AC$  (рис. 66). Треугольник  $ABD$  будем называть «левым» треугольником, треугольник  $BDC$  — «правым». Рассмотрим процесс, описанный в условии задачи; при этом на каждом шагу будем оставлять лишь те треугольники, подобные которым ранее не встречались. Для каждого треугольника будем брать представителя определяемого им класса, описанного выше. Пусть  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  — середины со-

\*) Это преобразование называется *инверсией*. См. замечание к решению задачи II.240, а также Приложение в конце книги.

ответственно  $AB, DB, CB$ ,  $m = |DB|$ ,  $h$  — высота  $\triangle ABC$ . Для «правых» треугольников возможны три случая.

1)  $u \leq 1/2$ ,  $m \leq 1/2$  или  $u \leq m$ ,  $1/2 \leq m$ , т. е. наибольшей является сторона  $DC$  или  $BD$ . Этот случай имеет место, если  $B$  расположена внутри фигуры  $DMFC$ , где  $DM$  — дуга окружности радиуса  $1/2$  с центром в точке  $C$ ,  $FC$  — правая часть дуги  $EC$ ,  $|DM| = |MC| = 1/2$ ,  $DC$  и

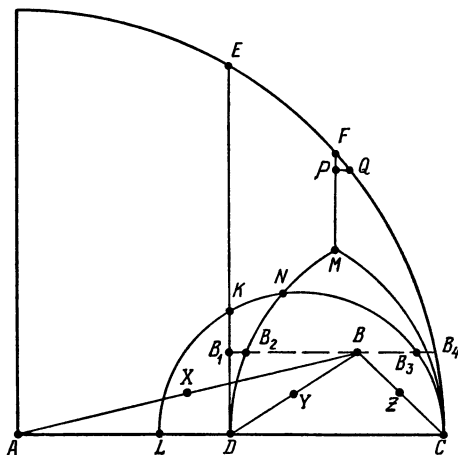


Рис. 66

$FM$  — отрезки,  $FM \perp DC$ . При этом дуга  $MC$  (центр которой  $D$ ) отделяет область, для которой в  $\triangle DBC$  наибольшей является сторона  $DC$ , от области, для которой наибольшей сторона — медиана  $DM$ . Представитель  $\triangle DBC$  в этом случае имеет высоту, равную  $2h$ , если наибольшей является  $DC$ , или  $\frac{h}{2m^2} \geq \frac{h}{2|DB_4|^2} = \frac{h}{\frac{5}{2} - 2\sqrt{1-h^2}} = q_1(h)h$ ,

$q_1(h) > 1$ , если  $h < \sqrt{7}/4$ .

2)  $u > m$ ,  $u > 1/2$ ,  $v > 2m$ . Заметим, что равенство  $v = 2m$  имеет место на окружности с диаметром  $LC$ , где  $|AL| = 1/3$ . Внутри этой окружности  $v > 2m$ . Этот случай имеет место, если точка  $B$  внутри криволинейного треугольника  $DKN$  ( $KN$  и  $ND$  — дуги,  $DK$  — отрезок). Поскольку треугольник  $DZC$  подобен исходному треугольнику  $ABC$ , рассматриваем лишь  $\triangle DZB$ . Наибольшая сторона у него  $DZ$ , равная  $v/2$ . Его представитель будет иметь высоту, равную  $\frac{h}{4(v/2)^2} = \frac{h^2}{v^2} \geq$

$$\geq \frac{h}{|AB_2|^2} \geq \frac{h}{|AB_3|^2} = \frac{h}{5/9 + (4/3)\sqrt{1/9 - h^2}} = q_2(h)h_1, \quad q_2(h) > 1.$$

3)  $u \geq 1/2$ ,  $u \geq m$ ,  $v \leq 2m$ . В этом случае в  $\triangle BZD$  наибольшей является сторона  $BD$ , равная  $m$  и рассматривать дальше части  $\triangle BDC$  нет необходимости, поскольку  $\triangle BYZ$  подобен  $\triangle BDC$ , а  $\triangle DYZ$  подобен  $\triangle ABD$  ( $\triangle DZC$  уже не рассматриваем).

Для «левых» треугольников возможных случаев два, они аналогичны случаям 2 и 3 для «правых» треугольников.

2') Если  $B$  внутри фигуры  $DKNC$ , то для дальнейших рассмотрений оставляем треугольник  $DXB$ , равный треугольнику  $DZB$ ; его представитель имеет высоту не меньше, чем  $q_2(h)h$ .

3') Если  $B$  вне фигуры  $DKNC$ , то дальнейшее рассмотрение частей  $\triangle ABD$  заканчивается.

Заметим, что коэффициент  $q_2(h)$  с ростом  $h$  растет, в то время как  $q_1(h)$  убывает и становится равным 1 в точке  $F$ ,  $h = \sqrt{7}/4$ . Возьмем точки  $P$  и  $Q$  на  $FM$  и дуге  $FC$  достаточно близко к  $F$ . Внутри фигуры  $B_1KNMPQB_4$  выполняются неравенства  $q_1(h) \geq q_0$ ,  $q_2(h) \geq q_0$ ,  $q_0 > 1$ . Следовательно, коэффициент возрастания  $h$  во всех случаях не меньше, чем  $q_0$ , и через конечное число шагов или для всех рассматриваемых треугольников будет иметь место случай 3 или же вершина треугольника окажется внутри криволинейного треугольника  $PFQ$ . Ситуация, когда точка  $B$  внутри  $PFQ$  легко рассматривается отдельно. При этом рассматривать следует «правые» треугольники. Достаточно выполне-

ния условия  $|FP| \leq |FM| = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{4}$ . В  $\triangle BDC$  сторона  $BD$ , равная  $m$ , — наибольшая,  $h^2 \leq 7/16$ . Можно показать, что представителю класса треугольников, подобных  $BDC$ , будет соответствовать точка вне криволинейного треугольника  $PFQ$ . А поскольку высота при этом не уменьшится, то для обеих частей  $\triangle BDC$  будет иметь случай 3. Этим завершается доказательство первой части.

Вторая часть следует из результата задачи П.327, а также из того, что все треугольники, которые рассматриваются после первого деления, имеют представителя, высота которого не меньше  $h$  и, следовательно, наименьший угол не меньше, чем  $\angle B_4AC > \frac{1}{2} < \angle B_1AC \geq \frac{1}{2} < \angle BAC$ .

**381.** Сформулируем и докажем более сильный, чем это требуется по условию, результат, полученный М. Д. Ковалевым. Среди всех выпуклых фигур, покрывающих любой треугольник со сторонами, не превосходящими единицы, наименьшую площадь имеет треугольник  $ABC$ , в котором  $\angle A = 60^\circ$ ,  $|AB| = 1$ , а высота, опущенная на  $AB$ , равна  $\cos 10^\circ$ . Площадь этого треугольника равна  $\frac{1}{2} \cos 10^\circ \approx 0,4924$ .

1) Заметим, что нам достаточно найти треугольник, покрывающий любой равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны 1, а угол  $\varphi$  между ними не превосходит  $60^\circ$ . Это следует из того, что любой треугольник со сторонами, не превосходящими 1, можно покрыть равнобедренным треугольником указанного вида.

2) Докажем, что любой указанный в пункте 1) равнобедренный треугольник может быть покрыт  $\triangle ABC$ . Построим окружность с центром в точке  $C$  и радиусом 1. Пусть  $K, L, M$  и  $N$  — последовательные точки ее пересечения с  $CB, BA$  и  $AC$  ( $L$  и  $M$  находятся на  $BA$ ),  $\angle LCM = \angle MCN = 20^\circ$ . Значит, равнобедренные треугольники с углом  $0 \leq \varphi \leq 20^\circ$  покрываются сектором  $CMN$ , а треугольники, у которых

$20^\circ < \varphi \leq \angle C$  будут покрыты  $\triangle ABC$ , если концы основания взять на дугах  $KL$  и  $MN$ , а третью вершину — в точке  $C$ . Построим теперь окружность единичного радиуса с центром в точке  $A$ . Эта окружность проходит через точку  $B$ , вторично пересекает  $BC$  в точке  $P$ , сторону  $AC$  — в точке  $Q$ . Получаем:  $\angle PAB = 180^\circ - 2\angle B < \angle C$ , поскольку  $B$  — наибольший угол  $\triangle ABC$ . Значит, взяв вершину равнобедренного треугольника в точке  $A$ , а концы основания в точке  $B$  и на дуге  $PQ$ , можно покрыть любой равнобедренный треугольник, для которого  $\angle C < \varphi \leq 60^\circ$  (даже  $180^\circ - 2\angle B \leq \varphi \leq 60^\circ$ ).

3) Докажем, что как бы ни были расположены на плоскости равнобедренный треугольник  $DEF$ , в котором  $\angle DEF = 20^\circ$ ,  $|DE| = |EF| = 1$  и равносторонний треугольник  $XYZ$  со стороной 1, площадь наименьшей выпуклой фигуры, содержащей треугольники  $DEF$  и  $XYZ$ , не меньше, чем  $\frac{1}{2} \cos 10^\circ$ . Сначала заметим, что сторона наименьшего

правильного треугольника, содержащего  $DEF$ , равна  $\frac{2}{\sqrt{3}} \cos 10^\circ$ .

(Справедливо следующее утверждение: если один треугольник возможно поместить внутри другого, то его можно расположить так, что две его вершины будут находиться на сторонах большего. Доказывать это общее утверждение не будем. Достаточно проверить его справедливость в случае, когда один из них есть  $\triangle DEF$ , а другой — правильный. Это сделать нетрудно.) Рассмотрим теперь наименьший правильный треугольник  $X_1Y_1Z_1$  со сторонами, параллельными сторонам треугольника  $XYZ$ , содержащий треугольники  $DEF$  и  $XYZ$ . Сторона тре-

угольника  $X_1Y_1Z_1$  не меньше, чем  $\frac{2}{\sqrt{3}} \cos 10^\circ$ , а высота не меньше,

чем  $\cos 10^\circ$ . На сторонах  $\triangle X_1Y_1Z_1$ , не содержащих сторон  $\triangle XYZ$ , должны находиться вершины  $\triangle DEF$ . Следовательно, сумма расстояний от тех вершин  $\triangle DEF$ , которые находятся вне  $\triangle XYZ$ , до соответствующих сторон  $\triangle XYZ$  не меньше, чем  $\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}$ , а площадь наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего  $\triangle DEF$  и  $\triangle XYZ$ ,

не меньше, чем  $\frac{1}{2} \left( \cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \cos 10^\circ$ . (М. Д. Ковале-

вым было также доказано, что наименьшая по площади найденная нами выпуклая покрывка для треугольников со сторонами, превосходящими единицу, единственна.) **З а м е ч а н и е.** Рассмотренная задача естественным образом возникает в связи с широкоизвестной нерешенной проблемой Лебега о форме наименьшей по площади фигуры, способной накрыть любое множество на плоскости, если диаметр этого множества не превосходит единицы.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

---

### Инверсия

Рассмотрим на плоскости окружность  $\alpha$  с центром в точке  $O$  и радиусом  $R$ . Для каждой точки  $A$ , отличной от  $O$ , определим следующим образом точку  $A'$ . Точка  $A'$  расположена на луче  $OA$ , причем  $|OA'| \cdot |OA| = R^2$ . Таким образом, для всех точек плоскости, за исключением точки  $O$ , задается преобразование, которое мы будем называть *инверсией относительно окружности  $\alpha$* . Это преобразование называют также *симметрией относительно окружности*, а точки  $A$  и  $A'$  — *симметричными относительно окружности  $\alpha$* . (Если рассматривать прямую как окружность бесконечного радиуса, то симметрию относительно прямой можно представить как предельный случай симметрии относительно окружности.) Точка  $O$  называется *центром инверсии*, величина  $k = R^2$  — *степенью инверсии*. Очевидно, что точки  $A$  и  $A'$  меняются местами,  $A$  переходит в  $A'$ ,  $A'$  переходит в  $A$ . Все точки окружности  $\alpha$ , и только они, остаются неподвижными. Внутренние точки окружности  $\alpha$  становятся внешними и наоборот.

Можно «пополнить» плоскость «бесконечно удаленной точкой» ( $\infty$ ) и считать, что при инверсии точка  $O$  переходит в  $\infty$ , а  $\infty$  — в точку  $O$ .

В дальнейшем точки, в которые переходят при инверсии точки  $A, B, C, \dots$ , будем обозначать  $A', B', C', \dots$ .

### Свойства инверсии

Перечислим некоторые основные свойства инверсии, оставляя без доказательства наиболее простые и очевидные и намечая схему рассуждений в остальных случаях. (Пополнение рассуждений недостающими звеньями, рассмотрение различных вариантов расположения фигур, а также выполнение выкладок и чертежей входит в обязанности читателя.)

1. Прямая, проходящая через центр инверсии, переходит сама в себя.

2. Если точки  $O, A$  и  $B$  не лежат на одной прямой, то треугольники  $OAB$  и  $OB'A'$  подобны. Сходственными являются вершины  $A$  и  $B'$ ,  $B$  и  $A'$ . Кроме того,  $|A'B'| = (k |AB|) / (|OA| \cdot |OB|)$ .

Заметим, что последнее равенство справедливо и в случае, если точки  $O, A$  и  $B$  расположены на одной прямой.

3. Прямая, не проходящая через центр инверсии  $O$ , переходит в окружность, проходящую через  $O$ . При этом, если  $l$  — заданная прямая,  $A$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $O$  на  $l$ , то  $l$  переходит в окружность с диаметром  $OA'$ .

Возьмем произвольную точку  $B$  на  $l$ . Из подобия треугольников  $OAB$  и  $OB'A'$  (свойство 2) следует, что  $\angle OB'A' = \angle OAB = 90^\circ$ .

4. Окружность  $\omega$ , проходящая через центр инверсии  $O$ , переходит в прямую, перпендикулярную прямой, проходящей через  $O$  и центр окружности  $\omega$ .

5. Если прямая  $l$  и окружность  $\omega$  переходят друг в друга при инверсии с центром в  $O$ , то касательная к  $\omega$  в точке  $O$  параллельна  $l$ .

6. Окружность  $\omega$ , не проходящая через  $O$ , переходит в окружность  $\omega'$ , также не содержащую  $O$ . При этом  $O$  — внешний центр подобия окружностей  $\omega$  и  $\omega'$ .

Для доказательства проведем через  $O$  прямую и обозначим через  $A$  и  $B$  точки ее пересечения с окружностью (в частности, можно считать, что  $A$  и  $B$  — диаметрально противоположные точки  $\omega$ ). Предположим, что  $B$  лежит на отрезке  $OA$ . Тогда  $A'$  принадлежит отрезку  $OB'$ . Если  $C$  — произвольная точка окружности, то, учитывая подобие соответствующих треугольников (свойство 2), будем иметь  $\angle A'C'B' = \angle OC'B' - \angle OC'A' = \angle OBC - \angle OAC = \angle ACB$ .

Поскольку число точек пересечения двух линий при инверсии не меняется, то:

7. Две касающиеся окружности при инверсии в зависимости от положения центра инверсии переходят в:

а) две касающиеся окружности (если  $O$  не лежит ни на одной из них);

б) окружность и касающуюся ее прямую ( $O$  лежит на одной из окружностей, но не совпадает с точкой касания);

в) пару параллельных прямых ( $O$  совпадает с точкой касания).

### Угол между окружностями

Углом между двумя пересекающимися окружностями называется угол между касательными к окружностям, проходящими через одну из точек их пересечения. Углом между окружностью и пересекающейся с ней прямой называется угол между этой прямой и касательной к окружности, проходящей через одну из точек пересечения. При этом можно считать, что угол между прямыми не превосходит  $90^\circ$ .

Очевидно, что при определении угла между окружностями выбор точки пересечения не имеет значения. Очевидно также, что угол между окружностями равен углу между радиусами, проведенными в точку пересечения.

8. При инверсии сохраняется угол между прямыми, т. е. угол между прямыми равен углу между их образами.

Если центр инверсии совпадает с точкой пересечения прямых, утверждение тривиально. Если же этот центр не совпадает с точ-

кой пересечения прямых, то оно следует из свойства 5 и определения угла между окружностями или между окружностью и прямой.

**9. При инверсии угол между двумя окружностями равен углу между их образами.**

Рассмотрим случай, когда центр инверсии не лежит на данных окружностях. Пусть  $A$  — одна из точек пересечения окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ,  $l_1$  и  $l_2$  — касательные к  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно, проходящие через  $A$ . Предположим дополнительно, что центр инверсии  $O$  не лежит на прямых  $l_1$  и  $l_2$ . При инверсии с центром  $O$  окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  перейдут соответственно в окружности  $\omega'_1$  и  $\omega'_2$ , а прямые  $l_1$  и  $l_2$  — в окружности  $l'_1$  и  $l'_2$ , касающиеся соответственно  $\omega'_1$  и  $\omega'_2$  в точке их пересечения —  $A'$  (свойство 7), т. е. угол между  $l'_1$  и  $l'_2$  равен углу между  $\omega'_1$  и  $\omega'_2$ , а поскольку угол между  $l'_1$  и  $l'_2$  равен углу между  $l_1$  и  $l_2$  (свойство 8), то угол между  $\omega'_1$  и  $\omega'_2$  равен углу между  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

**10. Если окружности  $\alpha$  и  $\omega$  ортогональны, т. е. угол между ними равен  $90^\circ$ , то при инверсии относительно  $\alpha$  окружность  $\omega$  переходит сама в себя. И наоборот, если при инверсии относительно окружности  $\alpha$  окружность  $\omega$ , не совпадающая с  $\alpha$ , переходит сама в себя, то  $\alpha$  и  $\omega$  ортогональны.**

Очевидно, последнее свойство симметрично относительно  $\alpha$  и  $\omega$ . Радиусы окружностей  $\alpha$  и  $\omega$  равны соответственно касательным, проведенным из центра одной окружности к другой окружности.

На основании свойства 10 можно определить инверсию следующим образом. Все точки окружности  $\alpha$  переходят сами в себя. Если же  $A$  не принадлежит  $\alpha$  и не совпадает с ее центром, то образом точки  $A$  будет точка  $A'$ , являющаяся второй точкой пересечения любых двух окружностей, ортогональных  $\alpha$  и проходящих через  $A$ . Теперь становится понятен смысл второго названия инверсии — симметрия относительно окружности. Из этого определения и свойства инверсии сохранять угол между пересекающимися окружностями следует, что:

**11. Для любой окружности  $\omega$  и двух точек  $A$  и  $B$ , переходящих друг в друга при инверсии относительно  $\omega$ , их образами при инверсии относительно окружности  $\alpha$ , центр которой не принадлежит  $\omega$ , будут окружность  $\omega'$  и точки  $A'$  и  $B'$ , переходящие друг в друга при инверсии относительно  $\omega'$ . Если же центр  $\alpha$  лежит на  $\omega$ , то  $\omega$  перейдет в прямую  $l$ , а точки  $A$  и  $B$  — в точки  $A'$  и  $B'$ , симметричные относительно  $l$ .**

### Радикальная ось двух окружностей

Решим следующую задачу.

Даны две неконцентрические окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Найти геометрическое место точек  $M$ , для которых касательные, проведенные к окружностям  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , равны между собой.

Решение. Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ,  $r_1$  и  $r_2$  — их радиусы,  $A_1$  и  $A_2$  — точки касания. Имеем  $|MO_1|^2 - |MO_2|^2 = (|MA_1|^2 + r_1^2) - (|MA_2|^2 + r_2^2) = r_1^2 - r_2^2$ . Таким образом,



все точки принадлежат одной прямой, перпендикулярной  $O_1O_2$ . Эта прямая называется *радикальной осью* окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Для завершения решения нашей задачи остается установить, какие точки найденной прямой удовлетворяют ее условию. Можно показать, что если окружности не пересекаются, то подходят все точки радикальной оси. Если же  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются, то радикальная ось содержит их общую хорду; а все точки общей хорды не входят в искомое место точек. Соответственно в случае касания  $\omega_1$  и  $\omega_2$  исключается точка касания.

Рассмотрим окружность  $\alpha$  с центром  $M$  на радикальной оси окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и радиусом, равным длине касательной, проведенной из  $M$  к  $\omega_1$  или  $\omega_2$ . (Предполагаем, что  $M$  вне  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .) Окружность  $\alpha$  ортогональна окружностям  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Таким образом, точки радикальной оси, расположенные вне окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , если они пересекаются или касаются, являются геометрическим местом центров окружностей, ортогональных одновременно  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , а соответствующая инверсия переводит каждую из них саму в себя.

Теперь докажем еще одно свойство инверсии.

**12. Если окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  не пересекаются, то существует инверсия, переводящая их в концентрические окружности.**

Возьмем окружность  $\alpha$ , ортогональную  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , с центром на прямой  $l$ , содержащей центры  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Поскольку окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  не пересекаются, такая окружность  $\alpha$  существует. Пусть  $O$  — одна из точек пересечения окружности  $\alpha$  с прямой  $l$ . При инверсии с центром в  $O$  прямая  $l$  переходит сама в себя, а окружность  $\alpha$  — в прямую  $p$ . Прямые  $l$  и  $p$  пересекаются и ортогональны окружностям  $\omega'_1$  и  $\omega'_2$  — образам  $\omega_1$  и  $\omega_2$  при инверсии относительно  $\alpha$ . Отсюда следует, что центры  $\omega'_1$  и  $\omega'_2$  совпадают с точкой пересечения прямых  $l$  и  $p$ , т. е.  $\omega'_1$  и  $\omega'_2$  — концентрические окружности. (Докажите, что если прямая ортогональна окружности, то она проходит через ее центр.)

Здесь уместно сделать одно замечание. Любая окружность, ортогональная  $\omega'_1$  и  $\omega'_2$  — концентрическим окружностям, есть прямая — окружность бесконечного радиуса. Значит, при инверсии относительно окружности  $\alpha$  все окружности, ортогональные  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , должны перейти в прямые. Следовательно, все окружности, ортогональные  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , пересекают прямую  $l$  в двух фиксированных точках.

**13. Для любых двух окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  существует по крайней мере одна инверсия, переводящая их друг в друга. Окружность определяющая эту инверсию, называется *срединой окружностью*  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .**

Более точно теорему 13 следует сформулировать следующим образом. Если  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются, то существует в точности две инверсии, при которых  $\omega_1$  переходит в  $\omega_2$  и наоборот. Если же  $\omega_1$  и  $\omega_2$  касаются или не пересекаются, такая инверсия одна.

Рассмотрим сначала случай пересекающихся окружностей. Сделаем инверсию  $I$  с центром в одной из точек их пересечения.  $\omega_1$  и  $\omega_2$  перейдут в пересекающиеся прямые  $l_1$  и  $l_2$ . Прямые  $l_1$

и  $l_2$  имеют две биссектрисы, относительно которых  $l_1$  и  $l_2$  симметричны. Следовательно (свойство 11), при той же инверсии  $I$  эти биссектрисы перейдут в две окружности, относительно которых  $\omega_1$  и  $\omega_2$  симметричны.

Если  $\omega_1$  и  $\omega_2$  не пересекаются, то существует инверсия  $I$  (свойство 12), переводящая их в концентрические окружности  $\omega'_1$  и  $\omega'_2$ . Пусть  $O$  — центр  $\omega'_1$  и  $\omega'_2$ ,  $r_1$  и  $r_2$  — их радиусы. Инверсия относительно окружности  $\alpha'$  с центром в  $O$  и радиусом  $\sqrt{r_1 r_2}$  переводит  $\omega'_1$  и  $\omega'_2$  друг в друга. При инверсии  $I$  окружность  $\alpha'$  перейдет в искомую окружность  $\alpha$ , относительно которой  $\omega_1$  и  $\omega_2$  симметричны.

В заключение этого раздела дадим определение радикального центра трех окружностей. Рассмотрим три окружности  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , центры которых не лежат на одной прямой. Можно доказать, что три радикальные оси, соответствующие трем парам этих окружностей, пересекаются в одной точке  $M$ . Эта точка называется *радикальным центром* окружностей  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ . Касательные, проведенные из  $M$  к окружностям  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , равны между собой. Значит, соответствующая инверсия с центром в  $M$  переводит каждую из окружностей  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  саму в себя.

### Задачи и упражнения

1. Найдите образ квадрата при инверсии относительно вписанной в него окружности.

2. Дан треугольник  $ABC$ . Найти все точки  $O$  такие, что инверсия с центром в  $O$  переводит прямые  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  в окружности равного радиуса.

3. Пусть  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  — соответственно образы точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  при инверсии с центром в точке  $O$ . Доказать, что:

а) если  $O$  совпадает с центром описанной около  $ABC$  окружности, то треугольник  $A'B'C'$  подобен треугольнику  $ABC$ ;

б) если  $O$  совпадает с центром вписанной окружности, то треугольник  $A'B'C'$  подобен треугольнику с вершинами в центрах вневписанных окружностей;

в) если  $O$  совпадает с точкой пересечения высот треугольника  $ABC$ , то треугольник  $A'B'C'$  подобен треугольнику с вершинами в основаниях высот треугольника.

4. Точки  $A$  и  $A'$  симметричны относительно окружности  $\alpha$ ,  $M$  — произвольная точка этой окружности. Доказать, что отношение  $|AM|/|A'M|$  постоянно.

5. В окружности  $\alpha$  проведены два перпендикулярных диаметра. Прямые, соединяющие концы одного диаметра с произвольной точкой окружности  $\alpha$ , пересекают второй диаметр и его продолжение в точках  $A$  и  $A'$ . Доказать, что  $A$  и  $A'$  симметричны относительно окружности  $\alpha$ .

6. Доказать, что если окружность  $\omega$  проходит через центр окружности  $\alpha$ , то образ  $\omega$  при инверсии относительно  $\alpha$  — их радикальная ось.

7. Дана окружность и две точки  $A$  и  $B$  на ней. Рассмотрим всевозможные пары окружностей, касающихся данной в точках  $A$  и  $B$  и касающихся между собой в точке  $M$ . Найти геометрическое место точек  $M$ .

8. Даны две касающиеся окружности. Произвольная окружность касается их обеих в точках  $A$  и  $B$ . Доказать, что прямая  $AB$  проходит через фиксированную точку плоскости. (В случае равных окружностей  $AB$  параллельна прямой, проходящей через их центры.)

9. Даны три окружности  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ , проходящие через одну точку. Известно, что прямая, проходящая через точки пересечения окружностей  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , содержит центр окружности  $\alpha_3$ ; прямая, проходящая через точки пересечения  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ , содержит центр окружности  $\alpha_1$ . Доказать, что прямая, проходящая через точки пересечения  $\alpha_3$  и  $\alpha_1$ , содержит центр окружности  $\alpha_2$ .

10. Даны две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Рассмотрим две произвольные окружности, касающиеся  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и касающиеся между собой в точке  $M$ . Найти геометрическое место точек  $M$ .

11. Доказать, что с помощью инверсии любые две окружности могут быть переведены в равные.

12. Доказать, что с помощью инверсии четыре точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , не лежащие на одной прямой можно перевести в вершины параллелограмма.

13. Инверсия относительно окружности с центром  $O$  и радиусом  $R$  переводит окружность с центром  $A$  и радиусом  $r$  в окружность радиусом  $r'$ . Доказать, что  $r' = (rR^2)/|OA|^2 - r^2$ .

14. На плоскости даны четыре точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Доказать, что  $|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| \geq |AC| \cdot |BD|$ .

15. В треугольнике  $ABC$  сторона  $AC$  наибольшая. Доказать, что для любой точки  $M$  справедливо неравенство  $|AM| + |CM| \geq |BM|$ .

16. Доказать, что все окружности, проходящие через данную точку  $A$  и пересекающие окружность  $\alpha$  в диаметрально противоположных точках, содержат еще одну фиксированную точку, отличную от  $A$ .

17. Даны четыре точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Доказать, что угол между окружностями, описанными около треугольников  $ABC$  и  $BCD$ , равен углу между окружностями, описанными около треугольников  $CDA$  и  $DAB$ .

18. Окружность  $\omega$  проходит через центр окружности  $\alpha$ .  $A$  — произвольная точка окружности  $\omega$ . Прямая, проходящая через  $A$  и центр окружности  $\alpha$ , пересекает общую хорду окружностей  $\alpha$  и  $\omega$  в точке  $A'$ . Доказать, что  $A$  и  $A'$  симметричны относительно окружности  $\alpha$ .

19. Даны две непересекающиеся окружности, не содержащие друг друга, и точка  $A$ , расположенная вне окружностей. Доказать, что существует в точности четыре окружности (среди них могут быть и прямые), проходящих через  $A$  и касающихся данных окружностей.

20. Пусть  $s$  площадь окружности, центр которой находится на расстоянии  $a$  от точки  $O$ . Инверсия относительно окружности с

центром  $O$  и радиусом  $R$  переводит данную окружность в окружность площадью  $s'$ . Доказать, что  $s' = s \cdot R^4 / (a^2 - R^2)^2$ .

21. Даны две окружности, касающиеся между собой. Рассмотрим две другие окружности, касающиеся данных и между собой. Пусть  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы двух последних окружностей, а  $d_1$  и  $d_2$  — расстояния от их центров до прямой, проходящей через центры данных окружностей. Доказать, что  $\left| \frac{d_2}{r_2} - \frac{d_1}{r_1} \right| = 2$  или  $\frac{d_2}{r_2} + \frac{d_1}{r_1} = 2$ .

22. Пусть  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — две касающиеся окружности. Рассмотрим последовательность различных окружностей  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ , каждая из которых касается  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , и, кроме того, окружность  $\alpha_{k+1}$  касается окружности  $\alpha_k$ . Обозначим радиусы окружностей  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$  через  $r_0, r_1, \dots, r_n, \dots$ , а расстояния от их центров до прямой, проходящей через центры  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — через  $d_0, d_1, \dots, d_n, \dots$ . Выразить  $d_n$  через  $r_n$ , если:

а)  $d_0 = 0$  (этот случай возможен, если  $\omega_1$  и  $\omega_2$  касаются внутренним образом);

б)  $d_0 = kr_0$ .

23. Пусть  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — две пересекающиеся окружности,  $A$  и  $B$  — их точки пересечения,  $\omega$  — произвольная окружность, касающаяся  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ,  $r$  — радиус окружности  $\omega$ ,  $d$  — расстояние от ее центра до прямой  $AB$ . Доказать, что отношение  $r/d$  может принимать лишь два различных значения.

24. Даны две непересекающиеся окружности  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и набор окружностей  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , касающихся  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , причем  $\omega_2$  касается  $\omega_1$ ,  $\omega_3$  касается  $\omega_2$ , ...,  $\omega_n$  касается  $\omega_{n-1}$ . Будем говорить, что система окружностей  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  образует цепь, если  $\omega_n$  и  $\omega_1$  касаются между собой. Доказать, что если для окружностей  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  существует хотя бы одна цепь из  $n$  окружностей, то существует бесконечно много цепей. При этом для любой точки  $A$  на какой-либо окружности  $\alpha_1$  или  $\alpha_2$  существует цепь, для которой  $A$  есть точка касания одной из окружностей цепи.

25. Доказать, что если для окружностей  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  существует цепь из  $n$  непересекающихся окружностей (см. задачу 24), то  $(R \pm r)^2 - d^2 = 4Rr \operatorname{tg}^2(\pi/n)$ , где  $R$  и  $r$  — радиусы окружностей  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ,  $d$  — расстояние между их центрами. (Знак « $-$ » берется, если одна окружность расположена внутри другой, « $+$ » — в противном случае.)

26. Рассмотрим три окружности, каждая из которых касается трех вневписанных окружностей некоторого треугольника, причем каждая из этих окружностей касается одной вневписанной окружности внутренним образом, а двух внешним образом. Доказать, что три эти окружности пересекаются в одной точке.

27. Пусть  $d_1, d_2, \dots, d_n$  — расстояния от точки  $M$ , расположенной на дуге  $A_1A_n$  окружности, описанной около правильного  $n$ -угольника  $A_1A_2 \dots A_n$ , до вершин  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Доказать, что

$$\frac{1}{d_1 d_2} + \frac{1}{d_2 d_3} + \dots + \frac{1}{d_{n-1} d_n} = \frac{1}{d_1 d_n}.$$

28. Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_0$  — стороны  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$  вписанного в окружность  $n$ -угольника  $A_1A_2, \dots, A_n$ ;  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_0$  — расстояния от произвольной точки  $M$ , расположенной на дуге  $A_nA_1$  окружности, до прямых  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ . Доказать, что  $\frac{a_0}{p_0} = \frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{p_{n-1}}$ .

### Указания и решения

2. Точек, обладающих требуемым свойством, — четыре: центры вписанной в треугольник окружности и трех внеписанных окружностей.

3. б) Докажите подобие треугольников  $OAB$  и  $OI_bI_a$ . Теперь из свойства 2 будет следовать параллельность прямых  $A'B'$  и  $I_aI_b$ .

7. Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — окружности, касающиеся данной окружности  $\omega$  в точках  $A$  и  $B$ . При инверсии с центром в  $A$  окружности  $\omega$  и  $\alpha$  перейдут в параллельные прямые  $l$  и  $p$ , окружность  $\beta$  — в окружность  $\beta'$ , касающуюся  $l$  в фиксированной точке  $B'$  и прямой  $p$  в точке  $M'$ . Таким образом,  $M'$  лежит на прямой, проходящей через  $B'$  перпендикулярно  $l$ . Искомое геометрическое место точек есть окружность, проходящая через  $A$  и  $B$  и ортогональная  $\omega$ . Сами точки  $A$  и  $B$  исключаются. Ее центр в точке пересечения касательных к  $\omega$ , проходящих через  $A$  и  $B$ .

8. Пусть  $O$  — точка касания данных окружностей. При инверсии с центром в  $O$  эти окружности перейдут в пару параллельных прямых, на которых находятся точки  $A'$  и  $B'$ , причем отрезок  $A'B'$  им перпендикулярен. Прямая  $AB$  перейдет в окружность, описанную около треугольника  $A'B'O$ , которая, очевидно, проходит через точку  $P$ , симметричную точке  $O$  относительно прямой, равноотстоящей от полученных параллельных прямых.

9. Пусть  $O$  — точка пересечения окружностей  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ;  $A_1, A_2, A_3$  — соответственно точки пересечения, отличные от  $O$ , окружностей  $\alpha_2$  и  $\alpha_3, \alpha_3$  и  $\alpha_1, \alpha_1$  и  $\alpha_2$ . При инверсии с центром в  $O$  окружности  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  перейдут в прямые, образующие треугольник  $A'_1A'_2A'_3$ . Из условия и свойства 3 следует, что  $A'_3O \perp A'_1A'_2, A'_1O \perp A'_2A'_3$ . Значит,  $O$  — точка пересечения высот треугольника  $A'_1A'_2A'_3$  и  $A'_2O \perp A'_3A'_1$ .

10. Если  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются, то искомое геометрическое место состоит из двух окружностей — срединных окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (теорема 13), проходящих через точки пересечения  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , исключая сами точки пересечения  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Если они касаются, — из одной срединной окружности, исключая точку касания. Для доказательства достаточно сделать инверсию с центром в общей точке окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Если  $\omega_1$  и  $\omega_2$  не имеют общих точек, подходит вся срединная окружность. В этом случае надо сделать инверсию, переводящую  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в concentрические окружности.

11. Нужным свойством обладает любая инверсия с центром на срединной окружности, так как эта инверсия переводит средин-

ную окружность в прямую, относительно которой образы данных окружностей симметричны.

12. Рассмотрим два случая.

1) Точки  $A, B, C, D$  лежат на одной окружности  $\omega$ . Можно считать, что данные точки — последовательные вершины вписанного четырехугольника. Пусть  $O$  — точка пересечения окружности, ортогональной  $\omega$  и проходящей через  $A$  и  $C$ , с окружностью, ортогональной  $\omega$  и проходящей через  $B$  и  $D$ . При инверсии с центром в  $O$  четырехугольник  $ABCD$  перейдет во вписанный четырехугольник  $A'B'C'D'$ , диагонали которого являются диаметрами, т. е.  $A'B'C'D'$  — прямоугольник.

2)  $A, B, C, D$  не лежат на одной окружности. Обозначим через  $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D$  окружности, описанные соответственно около треугольников  $BCD, CDA, DAB, ABC$ . Возьмем срединную окружность  $\omega_B$  и  $\omega_D$ , разделяющую точку  $B$  и  $D$ , и срединную окружность  $\omega_A$  и  $\omega_C$ , разделяющую точки  $A$  и  $C$ . Обозначим через  $O$  точку их пересечения. (Докажите, что эти окружности пересекаются.) При инверсии с центром  $O$  данные точки перейдут в вершины выпуклого четырехугольника  $A'B'C'D'$ , у которого каждая диагональ делит его на два треугольника с равными описанными окружностями (см. задачу 11), следовательно, противоположные углы четырехугольника равны, отсюда следует что  $A'B'C'D'$  — параллелограмм (докажите).

13. Пусть прямая  $OA$  пересекает окружность с центром в  $A$  в точках  $B$  и  $C$ . Тогда  $|B'C'| = 2r'$ . Теперь можно воспользоваться формулой, данной в пункте 2.

14. Сделаем инверсию с центром  $A$ . Будем иметь  $|B'C'| + |C'D'| \geq |B'D'|$ . Затем воспользуемся формулой пункта 2.

15. Из предыдущей задачи следует, что  $|AC| \cdot |BM| \leq |AB| \cdot |CM| + |BC| \cdot |AM|$ . Так как  $AC$  — наибольшая сторона, то  $|BM| \leq \frac{|AB|}{|AC|} \cdot |CM| + \frac{|BC|}{|AC|} \cdot |AM| \leq |AM| + |MC|$ .

16. Пусть  $A'$  получается из  $A$  при инверсии относительно окружности  $\alpha$ .  $A_1$  симметрична  $A'$  относительно центра окружности  $\alpha$ . Докажите, что все указанные в условии окружности проходят через  $A_1$ .

17. Сделаем инверсию с центром в  $A$ . Первый угол будет равен углу между прямой  $B'C'$  и окружностью, описанной около  $B'C'D'$ , второй — углу между прямыми  $D'C'$  и  $D'B'$ .

18. Инверсия относительно окружности  $\alpha$  переводит прямую  $AB$  в  $\omega$ .

19. Сделаем инверсию с центром в  $A$ . Тогда утверждение задачи эквивалентно утверждению, что две окружности, расположенные вне друг друга, имеют ровно четыре касательные прямые.

20. Пусть прямая, проходящая через центр инверсии и центр данной окружности, пересекает данную окружность в точках, координаты которых равны  $x_1$  и  $x_2$  (начало координат в точке  $O$ ).

$$\text{Тогда } s' = \frac{\pi}{4} \left( \frac{R^2}{x_1} - \frac{R^2}{x_2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} (x_1 - x_2)^2 \frac{R^4}{(x_1 x_2)^2} = s \frac{R^4}{(a^2 - R^2)^2}.$$

21. Заметим, что для любой прямой  $l$ , проходящей через  $O$ , при инверсии с центром  $O$  для произвольной окружности выполняется равенство  $d/r = d'/r'$ , где  $r$  и  $r'$  — радиусы данной окружности и ее образа,  $d$  и  $d'$  — соответственно расстояния от их центров до прямой  $l$ . Это следует из того, что  $O$  — внешний центр подобия обеих окружностей (свойство 6).

Вернемся к нашей задаче. Сделаем инверсию с центром в точке касания данных окружностей. Данные окружности перейдут в пару параллельных прямых, прямая  $l$ , проходящая через центры данных окружностей, им перпендикулярна. Окружности с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  перейдут в пару касающихся между собой, а также параллельных прямых окружностей равного радиуса  $r'$ . Теперь очевидно, что если центры двух последних окружностей по одну сторону от  $l$  и, для определенности,  $d'_2 > d'_1$ , то  $\frac{d'_2}{r'} - \frac{d'_1}{r'} =$   
 $= \frac{d'_1 + 2r'}{r'} - \frac{d'_1}{r'} = 2$ . Если — по разные, то  $\frac{d'_2}{r'} + \frac{d'_1}{r'} = 2$ .

22. Воспользуемся результатом предыдущей задачи. Получим в случае а)  $d_n = 2nr_n$ ; в случае б) возможны два ответа:  $d_n = (2n + k)r_n$  и  $d_n = |k - 2n|r_n$ .

23. Сделаем инверсию с центром в  $A$ ; окружности  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  перейдут в две прямые  $l_1$  и  $l_2$ , пересекающиеся в точке  $B'$ , расположенной на прямой  $AB$ . Как было доказано при решении задачи 21,  $r/d = r'/d'$ . Но  $r'/d'$  есть отношение радиуса окружности, касающейся  $l_1$  и  $l_2$  к расстоянию от ее центра до фиксированной прямой, проходящей через точку пересечения  $l_1$  и  $l_2$ . Значит,  $r'/d'$  принимает лишь два значения, в зависимости от того, в какой из двух пар вертикальных углов, образованных  $l_1$  и  $l_2$ , расположена окружность.

24. Сделаем инверсию, переводящую  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в концентрические окружности (см. теорему 12). После этого утверждение задачи становится очевидным. Эта теорема носит название *поризма Штейнера*.

25. Если  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — концентрические окружности с радиусами  $R$  и  $r$ , то справедливость равенства  $(R - r)^2 = 4Rr \cdot \operatorname{tg}^2(\pi/n)$  ( $d = 0$ ) легко получается из очевидного соотношения:  $R - r = (R + r) \sin(\pi/n)$ ,  $R > r$ . Сделаем инверсию, центр которой находится на расстоянии  $a$  от общего центра окружностей  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Пусть, для определенности,  $a > R$ . Окружности  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  перейдут в окружности  $\alpha'_1$  и  $\alpha'_2$ ,  $\alpha'_2$  внутри  $\alpha'_1$ . При этом по формуле задачи 13 будем иметь  $R' = \frac{R\rho^2}{a^2 - R^2}$ ,  $r' = \frac{r\rho^2}{a^2 - r^2}$ , где  $\rho^2$  — степень инверсии. Для нахождения  $d'$  — расстояния между центрами окружностей  $\alpha'_1$  и  $\alpha'_2$  — проведем прямую через центр инверсии и центры  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ; отрезок этой прямой, заключенный между первыми двумя точками пересечения с окружностями  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , равен толщине кольца  $(R - r)$ . При инверсии он перейдет в отрезок длиной  $b =$   
 $= \frac{(R - r)\rho^2}{(a - r)(a - R)}$  (см. пункт 2), следовательно,  $d' = |R' - r' - b| =$

$$= \left| \frac{R\rho^2}{a^2 - R^2} - \frac{r\rho^2}{a^2 - r^2} - \frac{(R-r)\rho^2}{(a-r)(a-R)} \right| = \frac{a(R^2 - r^2)\rho^2}{(a^2 - r^2)(a^2 - R^2)}.$$

Далее, заменяя  $R'$  и  $r'$  по найденным выше формулам, получим

$$R' - r' = \frac{(R-r)(a^2 + Rr)\rho^2}{(a^2 - r^2)(a^2 - R^2)}.$$

Нам надо проверить справедливость равенства  $(R' - r')^2 - (d')^2 = 4R'r' \operatorname{tg}^2(\pi/n)$ . Выражая все входящие в него величины через  $R$ ,  $r$ ,  $a$ ,  $\rho$  и упрощая, приведем к равенству  $(R-r)^2(a^2 + Rr)^2 - (R-r)^2 a^2 (R+r)^2 = 4Rr(a^2 - r^2)(a^2 - R^2) \operatorname{tg}^2(\pi/n)$ . Но  $(R-r)^2 = 4Rr \operatorname{tg}(\pi/n)$ . Значит, надо проверить, что  $(a^2 + Rr)^2 - a^2(R+r)^2 = (a^2 - r^2)(a^2 - R^2)$ . Это сделать легко.

Случай  $a < R$  идентичен рассмотренному. Если же  $r < a < R$ , то  $\alpha'_1$  и  $\alpha'_2$  располагаются вне друг друга и в формуле, данной в условии, надо взять знак «+».

26. Сделаем инверсию с центром в радикальном центре вневписанных окружностей, при которой вневписанные окружности переходят сами в себя. При этой инверсии прямые, на которых лежат стороны треугольника, перейдут в окружности, о которых говорится в условии. Все эти три окружности пройдут через радикальный центр вневписанных окружностей треугольника.

27. Сделаем инверсию с центром в  $M$  и степенью 1. При этом точки  $A_1, A_2, \dots, A_n$  перейдут в точки  $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ , расположенные на одной прямой. Пусть сторона  $n$ -угольника равна  $a$ . Из формулы пункта 2 следует, что  $|A'_1 A'_2| = \frac{1}{d_1 d_2} a$ ;  $|A'_2 A'_3| = \frac{1}{d_2 d_3} a$ ; ...

$|A'_{n-1} A'_n| = \frac{1}{d_{n-1} d_n} a$ ;  $|A'_1 A'_n| = \frac{1}{d_1 d_n} a$ . Подставляя эти выражения в очевидное соотношение  $|A'_1 A'_n| = |A'_1 A'_2| + |A'_2 A'_3| + \dots + |A'_{n-1} A'_n|$ , придем к требуемому результату.

28. Сделаем инверсию с центром в точке  $M$ . Вершины данного  $n$ -угольника перейдут в  $n$  точек, расположенных на одной прямой, причем

$$|A'_1 A'_n| = |A'_1 A'_2| + |A'_2 A'_3| + \dots + |A'_{n-1} A'_n|. \quad (*)$$

Обозначим через  $p'$  длину перпендикуляра, опущенного из точки  $M$  на прямую  $A'_1 A'_n$ . Из подобия треугольников  $A_1 M A_2$  и  $A'_1 M A'_2$  (свойство 2) следует, что  $\frac{|A_1 A_2|}{|A'_1 A'_2|} = \frac{p_1}{p'}$ ,  $|A'_1 A'_2| = \frac{a_1}{p_1} p'$ . Аналогично

$$|A'_2 A'_3| = \frac{a_2}{p_2} p', \dots, |A'_{n-1} A'_n| = \frac{a_{n-1}}{p_{n-1}} p', |A'_1 A'_n| = \frac{a_0}{p_0} p'.$$

Подставляя эти выражения в соотношение  $(*)$  после сокращения на  $p'$ , приходим к требуемому равенству.



*Игорь Федорович Шарыгин*  
**ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ**  
ПЛАНИМЕТРИЯ

---

Серия: «Библиотечка «Квант», вып. 17

Редактор *А. А. Могилевский*  
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*  
Технические редакторы *В. Н. Кондакова, Е. В. Морозова*  
Корректор *Е. В. Сидоркина*

ИБ № 12976

Сдано в набор 12.07.85. Подписано к печати 29.01.86. Т-03379. Формат 84 × 108/32. Бумага кн.-журн. офсетная. Гарнитура таймс. Печать высокая. Усл. печ. л. 11,76. Усл. кр.-отт. 12,18. Уч.-изд. л. 15,11. Тираж 150 000 экз. Заказ № 5. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»  
Главная редакция физико-математической литературы  
117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.

**45 коп.**

---